Die Kreisumstülpung nach Cusanus

Alles kommt anders, wenn man denkt

INHALT

Vorbemerkungen:

Die Darstellung der Kreismetamorphose durch die Unendlichkeit, das heißt, durch den ‹Abgrund› und den ‹Nullpunkt› (Rudolf Steiner), habe ich in etlichen Gastepochen an verschiedenen Waldorfschulen seit 2006 durchgeführt. In den von mir veranstalteten ‹Studienwochen zur Anthroposophie Rudolf Steiners› seit 2016 ist sie stets der Beginn jeden Tages und bildet die unentbehrliche Grundlage für die anthroposophische Textarbeit und eben auch für die geschichtlichen Darstellungen…

In der anthroposophischen Sekundärliteratur habe ich einige Ansätze zu einer ähnlichen Betrachtungsweise gefunden. Ausgeführte Darstellungen wie die hier vorliegende sind mir nicht bekannt. Näheres in der Literaturliste.

Diese Epoche kann auch als Beitrag zur Philosophie gegeben werden. Dazu brauchen wir die Stunden 10-18 nicht. Das gilt auch für Leser, die keine mathematische Ausbildung genossen haben. **−** Die vereinfachte Kreisumstülpung kann als ‹rhythmischer Teil› in anderen Epochen ab Klasse 7 behandelt werden, wenn genug Zeit im Hauptunterricht (20 Min.) gegeben ist. Für die Lehrerbildung kann dieser Entwurf vielleicht auch hilfreich sein, vor allem im Hinblick auf die Kontinuität des Waldorfschul-Curriculums von der Klasse 1 (Gerade-Krumme als 1. Stunde überhaupt) bis zur 12, Klasse (Infinitesimalrechnung)….

Ich habe die Hilfe der KI Claude Sonnet 4.5 (Anthropic) in Anspruch genommen. Die Tipparbeit wurde dadurch sehr reduziert. Etliche Fehler der KI musste ich allerdings korrigieren. Und die Konzeption musste ich immer wieder gegen die KI durchsetzen. Der größte Nutzen war, dass mir Claude stets die Einwendungen und Missverständnisse des gewöhnlichen Bewusstseins präsentierte. Die Stunden 10-18 habe ich im Wesentlichen von Claude übernommen, da ich kein Mathematiker bin und diesen Bereich nie unterrichtet habe. Ich lasse den Text aber als Anregung für Mathematik-Kollegen stehen. Das Protokoll der Unterhaltungen mit Claude ist hier einsehbar. Kurzlink zum Abtippen: ogy.de/yqoq

Eine Vorversion mit Gemini (Google), die ‹einfallsreicher› als Claude arbeitete, wurde nicht beendet, weil ein Export der Zeichnungen und Texte nicht möglich war. (PDF, 88 Seiten) Interessante Einblicke in das ‹Selbstverständnis› der KI Claude habe ich aus dem Protokoll extrahiert (s. Literaturverzeichnis).

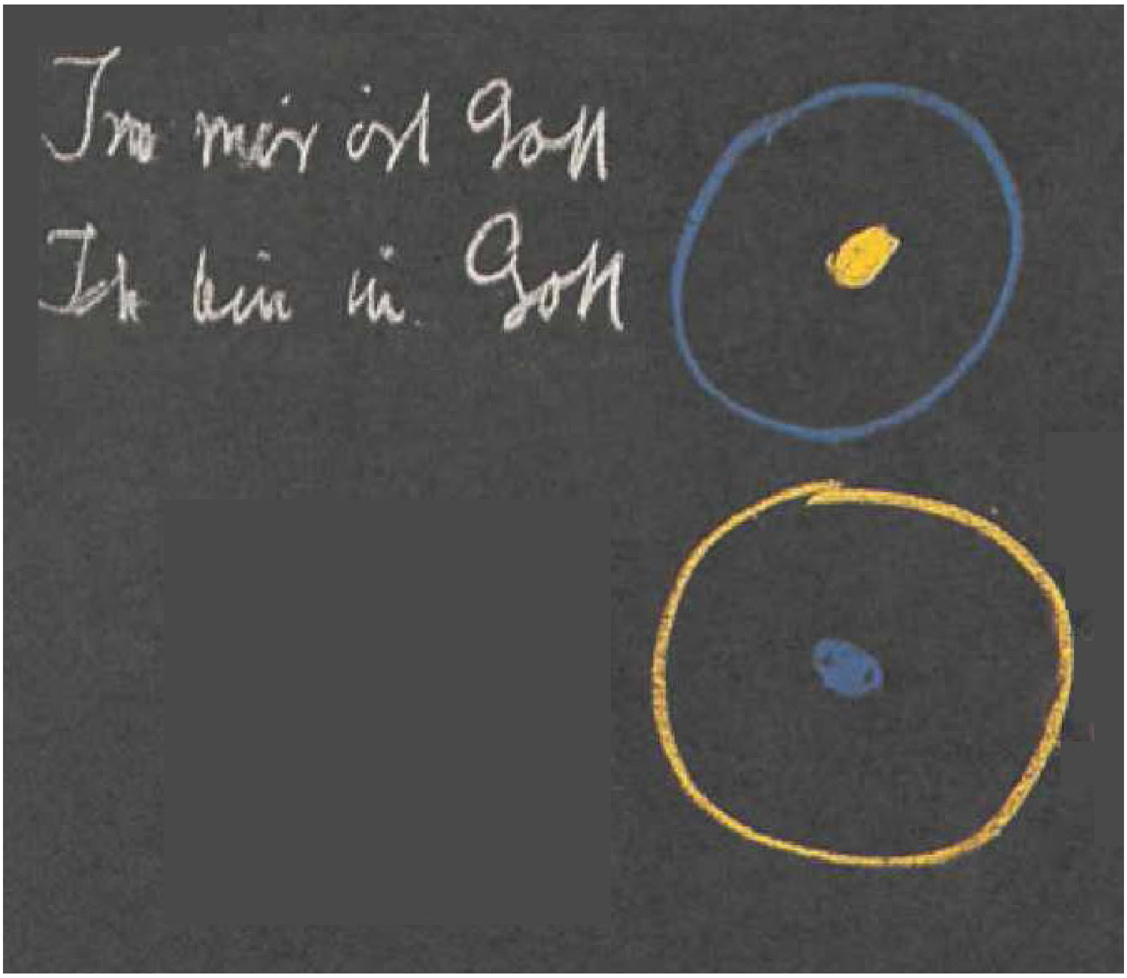
Kempten, 19. Juni 2026 Rüdiger Blankertz
www.menschenkunde.com | info@menschenkunde.com

***

1. Stunde − Das Rätsel

Eröffnung

Der Lehrer zeichnet an die Tafel zwei Kreise(ohne den Text) einen blauen Kreis mit gelbem Mittelpunkt, und einen gelben, mit blauem Mittelpunkt:



Und dann sagt er langsam, indem er nacheinander auf die beiden Kreise deutet: «**Das ist eines und dasselbe, die obere und untere Figur**. Und ihr müsst einfach verstehen, die Geste weiderholend: «Das ist ***EIN*** Kreis, das ist ***EIN*** Punkt.» Danach: «Ihr müsst **verstehen, dass ein Kreis ein Punkt, ein Punkt ein Kreis ist, und das müsst ihr ganz innerlich verstehen.**» (Vgl.: Rudolf Steiner, Heilpädagogischer Kurs, GA 317, S. 154, Vortrag vom 5. Juli 1924)

Unter diese Zeichnung schreibt er dann:

«Der Kreis ist Punkt, unendliche Linie, Dreieck und Kugel.»
Nikolaus von Kues (1401 bis 1464) ‹De docta ignorantia› (Die belehrte Unwissenheit)

Und er sagt: «Dieses Rätsel werden wir miteinander entwickeln, bis es uns als das größte Geheimnis der Welt und des Menschen erscheint.»

Epochenheft-Eintrag 1. Stunde

Beobachtung I: Das lebendige Dreieck

Wir bildeten mit unseren Armen ein Dreieck. Die Grundlinie AB verlief durch die Schultern, die Schultergelenke waren die Punkte A und B. Dort, wo sich die ausgestreckten Unterarme schnitten, befand sich der Punkt C − der Scheitel des Dreiecks.

Die Basiswinkel α (bei A) und β (bei B) lagen zu Beginn bei etwa 20 Grad. Der Scheitelwinkel γ bei C betrug entsprechend rund 140 Grad.

Beobachtung II: Die Spreizung − was geschieht mit C?

Wir spreizten die Arme langsam und gleichmäßig. Dabei beobachteten wir:

- Die Basiswinkel α und β wurden größer.
- Der Scheitelwinkel γ bei C wurde kleiner.
- Der Schnittpunkt C wanderte von uns fort − zunächst langsam, dann mit wachsender Geschwindigkeit.
- Die Summe der Innenwinkel blieb stets 180° ($\alpha + \beta + \gamma = 180°$).

Als die Arme nicht mehr als Strecken, sondern als Geraden gedacht werden mussten, reiste C bereits durch Schichten, die weit jenseits unserer unmittelbaren Anschauung lagen − über den Horizont hinaus, durch die Erdatmosphäre, durch die Mondbahn, durch das Sonnensystem, in die Milchstraße und darüber hinaus, bis − in Anlehnung an Douglas Adams − „zum Restaurant am Ende des Universums“.

> ***„Gott ist der Kreis, dessen Mittelpunkt überall ist, sagten die Alten.“*** **− Nikolaus von Kues (Cusanus), De docta ignorantia**

Beobachtung III: Der Sprung

Bei $\alpha = \beta = 90°$ sind die Arme − als Geraden gedacht − parallel. Der Scheitelwinkel γ beträgt 0°. Ein Schnittpunkt scheint nicht mehr zu existieren.

Doch: Geraden sind nach beiden Seiten unendlich. Durch die Eurythmiestäbe, die unsere Unterarme nach hinten verlängerten, wurde sichtbar: C taucht hinter uns wieder auf − auf der entgegengesetzten Seite. Der Schnittpunkt ist gesprungen.

Die entscheidende Frage lautet nun:

Was macht C in dem Moment des Sprungs? Wo ist er?

Ergebnis: Der Punkt im Unendlichen

In dem Augenblick, wo die Geraden exakt parallel sind, lässt sich für C keine Entfernung und keine Geschwindigkeit mehr angeben. Die Frage „Wie weit?“ verliert ihren Sinn.

Die Wertetabelle zeigt: Schon bei $\alpha = 89{,}99°$ liegt C in Entfernungen jenseits aller astronomischen Maßstäbe. Die Entfernung wächst dabei schneller als jede angebbare Geschwindigkeit. Bei $\alpha = 90°$ ist C nicht „sehr weit weg“ − es ist überall und nirgends zugleich.

Dieser Punkt hat in der euklidischen Geometrie keinen Platz. Er liegt außerhalb ihrer Kategorien. Dennoch ist er real − wir haben ihn mit unseren eigenen Armen herbeigeführt. Die projektive Geometrie wird ihm einen Namen geben:

der Punkt im Unendlichen.

Das ist das Rätsel, das wir in dieser Epoche schrittweise entfalten werden.

Lehrernotiz zur 1. Stunde

Methodisch-didaktische Hinweise für die Unterrichtsvorbereitung

Lehrernotiz

Die erste Stunde verfolgt drei Ziele gleichzeitig: (1) Wiederholung des Innenwinkelsatzes durch Wiederentdeckung, nicht durch Erklärung; (2) Einführung des zentralen Rätsels der Epoche − der Punkt im Unendlichen − durch leibliches Erleben; (3) Aufbau einer Erwartungshaltung, die die gesamte Epoche trägt.

Zur Körperübung:

- Die Schüler stehen oder sitzen in einer Reihe, die Arme vor dem Körper ausgestreckt. Abstand AB zwischen den Schultern ca. 50 cm.
- Wichtig: Die Bewegung geschieht sehr langsam und gleichmäßig. Wer zu schnell spreizt, verliert das Beobachtungsvermögen.
- Der Lehrer begleitet die Bewegung mit Fragen, nicht mit Erklärungen: „Was beobachtet ihr? Wohin bewegt sich C? Wie verhält sich γ?“

Zur Wiederentdeckung des Innenwinkelsatzes:

- Nicht ansagen. Die Schüler werden von selbst bemerken, dass γ kleiner wird, wenn α und β wachsen. Die Konstanz der Winkelsumme entsteht als Erlebnis, nicht als Merksatz.
- Erst nach der Beobachtung an der Tafel festhalten: $\alpha + \beta + \gamma = 180°$.

Zur Reise von C:

- Die astronomischen Analogien (Mondbahn, Sonnensystem, Milchstraße...) werden nicht aufgezählt, sondern „erzählt“ − langsam, mit Pausen, sodass die Schüler innerlich mitreisen.
- Das Zitat von Douglas Adams („Restaurant am Ende des Universums“) kann als Scherz eingebracht werden, der aber ernst gemeint ist: wir meinen tatsächlich das Ende des Sichtbaren.

Zum Sprung des Schnittpunkts:

- Die Eurythmiestäbe verlängern die Unterarme nach hinten, ohne dass die Schüler den Kopf drehen müssen. Das ist wichtig: das „Hinten“ soll ins Vorne-Bewusstsein hereinkommen, nicht durch Umdrehung des Körpers.
- Das Umdrehen des Kopfes ist bewusst zu vermeiden − der Lehrer kann später in der Faust-Epoche darauf zurückverweisen (der Teufel dreht Faust den Hals um).

- Den Sprung mehrfach wiederholen lassen: Arme kurz unter 90°, dann über 90°, dann zurück. Die Schüler sollen spüren, dass C nicht durch den Raum gleitet, sondern „springt“.

Zur Schlussfrage:

- „Was macht C im Moment des Sprungs?“ ist keine rhetorische Frage. Die Stunde endet mit ihr. Keine Antwort geben. Die Stunde schließt in der offenen Frage.
- Das Cusanus-Zitat („Der Kreis, dessen Mittelpunkt überall ist“) kann an die Tafel geschrieben werden − ohne Kommentar. Es ist ein Horizont, keine Erklärung.

Zur interaktiven Visualisierung:

- Die HTML-Datei (schnittpunkt_C_bewegung.html) kann am Beamer gezeigt werden, um die Wertetabelle und den Sprung gemeinsam zu erkunden.
- Erst nach der Körperübung zeigen − nie davor. Das leibliche Erleben muss dem abstrakten Bild vorausgehen.

2. Stunde − Der Kreis in Bewegung

Epochenheft-Eintrag 2. Stunde

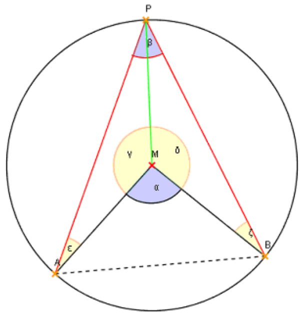
Wiederholung: Elemente der Kreisgeometrie

Was ist ein Kreis? Eine gekrümmte Linie, die in sich selbst zurückläuft. Oder genauer: Der geometrische Ort aller Punkte, die von eine gegebenen Punkt (dem Mittelpunkt) den gleichen Abstand beziehungsweise die gleiche Entfernung haben. Das ist eine starre Definition. Wir wollen das starre Gebilde in Bewegung bringen und sehen, was Unglaubliches dabei geschieht. Unsere Beobachtung soll die Veränderungen bei allen Kreiselementen feststellen, wenn wir in Aktion treten.

Bevor wir den Kreis in Bewegung bringen, benennen und definieren wir seine Elemente, sodass wir davon eine exakte innere Anschauung haben.

- Der Mittelpunkt − der die kreisenden Punkte der Umgebung in die Ordnung einer exakten Kreislinie bringt und so die anderen Kreiselemente hervorbringt. Ein Punkt ist ein gedachter geometrischer Ort, der keine Ausdehnung hat.
- Die Kreislinie − der Ort aller Punkte mit gleichem Abstand vom Mittelpunkt. Sie entsteht als Spur der Bewegung von Punkten um den Mittelpunkt.
- Der Radius − die gerade Strecke, die den Mittelpunkt und einen Punkt auf der Kreislinie in die genaue Beziehung bringt. Es gibt unendlich viele Radien. Alle Radien sind gleich lang.
- Der Durchmesser − zwei entgegengesetzte Radien. Oder die längste Sehne. Er ist die Strecke einer Geraden durch den Mittelpunkt mit der Länge von 2 Radien.
- Kreisinnenfläche und Kreisaußenfläche − der Kreis teilt die unendliche Ebene in zwei Bereiche: innen und außen. Die Kreisaußenfläche ist unbegrenzt groß.
- Die Sekante − eine Gerade, die den Kreis in zwei Punkten schneidet. Der Teil der in die Kreislinie fällt, nennt man Sehne. Durchmesser und Radien sind Spezialfälle der Sehne beziehungsweise Sekante.
- Die Tangente − Diese berührt den Kreis in genau nur einem Punkt. Alle Radien beziehungsweise Durchmesser stehen senkrecht (orthogonal) auf ihrer Tangente.
- Die Passante − eine Gerade, die den Kreis gar nicht trifft. Alle diese Geraden-Elemente entstehen wenn wir eine Passante in Gedanken durch einen Kreis bewegen: Passante − Tangente – Sekante/Sehne – Durchmesser/Radius – Sekante/Sehne – Tangente – Passante: Kein Schnittpunkt → einer → zwei → einer → keiner.
- Der Kreissektor − ein „Kuchenstück“ aus zwei Radien und einem Kreisbogen. Er bringt den *Zentriwinkel* am Schnittpunkt M der Radien ins Spiel.

- Das Kreissegment − der von einer Sehne abgetrennte Abschnitt des Kreises. Der Mittelpunkt ist nicht beteiligt.
- Der Zentriwinkel (Mittelpunktswinkel) − Winkel im Mittelpunkt zwischen zwei Radien.
- Der Umfangswinkel (Peripheriewinkel) − der Winkel auf der Kreislinie, der denselben Bogen überspannt wie ein Zentriwinkel.



- Der Schnittpunkt T der Tangenten an den Haltepunkten A und B – er liegt unterhalb des Kreises − bewegt sich in Richtung Kreislinie. Der Winkel an T wird größer.

Die Körperübung: den Kreis dehnen

M sei Mittelpunkt eines Kreises. Wir stehen an seinem Südpunkt − bei 6 Uhr − und halten den Kreis mit beiden Händen *von innen* bei 4 Uhr und 8 Uhr. Der Kreis liegt *horizontal vor* uns, in Höhe der Hände.

Wir stellen uns nun vor, dass der Kreis eine materielle Konsistenz hat, den gegen einen gewissen Widerstand dehnbar ist. Wir beginnen den Kreis von innen nach außen zu drücken − nicht zu einer Ellipse, sondern so, dass er als Kreis erhalten bleibt, aber gleichmäßig gedehnt wird. Mit den Handflächen drücken wir also die Kreislinie *von innen nach außen,* ohne dass wir die Hände dabei wegrutschen lassen – sie also nicht verschieben.

Beobachtung: was geschieht beim Dehnen?

Die Dehnung lassen wir gleichmäßig sehr langsam wachsen und beobachten dabei genau die Veränderungen, die sich mit den Kreiselementen abspielen. Was sehen wir, während wir aktiv sind?

- Die Kreislinie wächst − der Umfang wird größer.
- Die Kreisinnenfläche wächst. Die Kreisaußenfläche bleibt unendlich groß, aber die Grenze zwischen innen und außen − die Kreislinie − rückt weiter hinaus.
- Die Radien, die von unseren Haltepunkten A und B zum Mittelpunkt gehen, werden länger − gleichmäßig, denn der Kreis bleibt Kreis. Dies gilt natürlich für alle Radien und Durchmesser.
- Der Mittelpunkt M entfernt sich von uns − er flieht nach vorne (Richtung 12 Uhr).

– Der Kreisbogen zwischen unseren Händen − der Teil der Kreislinie zwischen 4 und 8 Uhr, auf dem wir bei 6 Uhr stehen − wird flacher, gestreckter, gerader. Die Krümmung der Kreislinie nimmt insgesamt ab.
– Der Zentriwinkel am Schnittpunkt der beiden Radien zu unseren Händen wird kleiner.
– Der Peripheriewinkel nimmt doppelt so schnell ab.
– Der Kreissektor − das ‹Kuchenstück› aus zwei Radien und einem Kreisbogen − wird größer, weil länger, und nähert sich im Nahbereich einer rechteckigen Form.
– Das Kreissegment − der von einer Sehne zwischen A und B abgetrennte Abschnitt des Kreises wird kleiner weil schmaler.

Der Druckvektor und die Kreisform

An den Haltepunkten bei 4 und 8 Uhr wirkt unser Druck radial nach außen. Die Haltepunkte selbst sind fix − die Hände halten sie von innen nach außen fest.

Die elastische Kreisform lenkt diesen geradlinigen Druckvektor in eine Kurve um: die resultierende Bewegung der Haltepunkte beim Dehnen verläuft nicht geradlinig, sondern entlang einer Kurve nach unten.

Das Rätsel am Ende der Stunde

Je größer der Kreis wird, desto gerader erscheint seine Linie dem Beobachter bei 6 Uhr. Die Krümmung nimmt ab. Der Mittelpunkt flieht nach vorne − immer schneller, je größer der Kreis wird.

Die Frage, die wir in die nächste Stunde mitnehmen:

Was wird aus dem Kreis, wenn er unendlich groß wird?

Die Kreislinie wird gerader und gerader. Wohin flieht der Mittelpunkt? Und was wird aus dem Kreis selbst?

Lehrernotiz zur 2. Stunde

Methodisch-didaktische Hinweise

Lehrernotiz

Die 2. Stunde hat drei Aufgaben: (1) die Grundelemente der Kreisgeometrie als lebendige Aufstellung einführen, nicht als Lexikoneintrag; (2) die gestrige Körpererfahrung auf den Kreis übertragen; (3) das nächste Rätsel der Epoche aufwerfen: Was wird aus dem Kreis, wenn er unendlich groß wird?

Zur phänomenologischen Aufstellung der Kreiselemente:

- Die Reihenfolge ist bewusst: vom Mittelpunkt (das Ruhende) über Radius und Kreislinie (das Werdende) zu den Linientypen (das Bewegte). Nicht alphabetisch, nicht nach Komplexität − sondern nach innerer Logik.

- Die Kreisaußenfläche ist unendlich groß − das ist kein Fehler, sondern eine wichtige Feststellung. Sie kann nicht von der Kreisinnenfläche subtrahiert werden. Das zeigt, dass der Kreis die Ebene asymmetrisch teilt: eine endliche und eine unendliche Seite.

Zur Körperübung:

- Der Kreis liegt horizontal, in Höhe der Hände − das ist entscheidend. ‹Vorne› und ‹hinten› bleiben die gewohnten Richtungen. Der Mittelpunkt flieht nach vorne (nicht nach oben wie in einer senkrechten Darstellung).
- Die Dehnung ist eine innere Vorstellung, keine körperliche Bewegung. Die Hände halten die Haltepunkte fest. Der Kreis wird im Geiste größer − die Hände spüren den Widerstand der elastischen Form.
- Den Schülern Zeit lassen: erst ruhig halten, dann langsam dehnen, dann innehalten und beschreiben.

Zum Druckvektor:

- Der Druckvektor wirkt von P und P‘ aus radial nach außen. Nicht vom Mittelpunkt M aus − das ist ein häufiges Missverständnis. M ist der Ursprung der Radien durch P und P‘, aber der Druck der Bewegung kommt von den Händen, also von beiden P in der angegebenen Position. Nur so kann der Prozess im Bewusstsein verfolgt werden.
- Die Ablenkung der Bewegung des Druckvektors nach unten durch die Kreisform in eine Kurve ist das erste Aufblitzen des Umstülpungsprinzips in der Mechanik. Es muss nicht vollständig erklärt werden − es genügt, das Phänomen zu benennen und eine Zeichnung dazu anzukündigen.
- Die Zeichnung (Druckvektor und Resultante) wird nachgereicht, wenn sie in geeigneter Qualität vorliegt.

Zur Schlussfrage:

- «Was wird aus dem Kreis, wenn er unendlich groß wird?» ist die Brücke zur 3. Stunde. Nicht beantworten. Die Schüler sollen die Nacht mit dieser Frage verbringen.
- Mögliche Schülerantworten vorwegnehmen: ‹Er wird zur Geraden› ist richtig − aber wie und warum, das ist die Aufgabe der 3. Stunde.
- Verbindung zur 1. Stunde halten: in Stunde 1 floh der Schnittpunkt C ins Unendliche. In Stunde 2 flieht der Mittelpunkt M. Beide Male ist es derselbe Vorgang: ein ausgezeichneter Punkt, der durch Spreizung beziehungsweise Dehnung ins Unendliche entweicht.

3. Stunde − Der Kreis stülpt sich um

Epochenheft-Eintrag 3. Stunde

Wiederholung: die offene Frage aus der 2. Stunde

Wir hatten die 2. Stunde mit einer Frage beendet: Was wird aus dem Kreis, wenn er unendlich groß wird? Die Kreislinie wurde flacher und gerader, der Mittelpunkt M floh nach vorne ins Unendliche. Heute setzen wir die Bewegung fort.

Die Körperübung: der vollständige Zyklus

Wir stehen wie in der 2. Stunde: Standpunkt bei 6 Uhr, Hände bei 4 und 8 Uhr, der Kreis liegt horizontal vor uns in Höhe der Hände. Eurythmiestäbe verlängern unsere Unterarme nach hinten.

Wir führen die Bewegung mehrmals durch − langsam, bewusst, mit Beobachtungsauftrag:

Erster Durchgang − M verfolgen:

– Dehnen: M entweicht dem Blick nach vorne, die Kreislinie wird zur Geraden. Innehalten.
– Weiterdrücken: hinter uns wölbt sich die Gerade zum neuen Kreis. Die Arme folgen, soweit die Anatomie es erlaubt − dann übernimmt die Vorstellung.
– M kommt von weit hinten näher. Der hintere Kreis wird kleiner. M nähert sich unserem Rücken, geht durch den Pol, also unseren Standpunkt hindurch.. Innehalten.
– Weiterdenken: vor uns entsteht wieder der ursprüngliche Kreis.

Zweiter Durchgang − die Kreislinie beobachten:

– Was geschieht mit der Kreislinie im Moment, wo sie zur Geraden wird?
– Was geschieht mit ihr im Moment, wo der Kreis zum Punkt wird?

Dritter Durchgang − innen und außen beobachten:

– Was geschieht mit der Kreisinnenfläche beziehungsweise der Kreisaußenfläche *im Moment* des Durchgangs in die Gerade?
– Und was geschieht mit ihnen nach dem Durchgang, im Entstehen des hinteren Kreises?

Wichtig: An der Grenze der Anatomie − wo die Arme nicht weiter reichen − beginnt das reine Denken. Genau dort, wo der Körper aufhört, muss die Vorstellung einspringen. Das ist keine Schwäche der Übung, sondern ihr eigentlicher Kern.

Überblick: der ganze Weg

Am Ende der Übung halten wir gemeinsam fest, was wir durchlaufen haben. An der Tafel entsteht folgende Abfolge − in den Worten der Klasse:

Kreis (vorne) → Gerade → Kreis (hinten) → Punkt → Kreis (vorne)

Das ist ein vollständiger Zyklus. Der Kreis hat sich einmal umgestülpt − durch die Gerade hindurch, durch den Punkt hindurch, zurück zu sich selbst.

Die zwei Denkprobleme

Wenn wir diese Abfolge genau betrachten, stoßen wir an zwei Stellen auf ernste Denkprobleme:

1. Was geschieht im Übergang durch die Gerade?

Die Gerade ist der Grenzfall des unendlich großen Kreises − das haben wir erlebt. Aber dann: aus der Geraden entsteht wieder ein Kreis − hinter uns. Wie? Was ist die Gerade in diesem Moment? Ist sie noch ein Kreis? Ist sie schon keiner mehr? Wie kann aus ihr ein Kreis hervorgehen − und warum hinter uns?

2. Was geschieht im Übergang durch den Punkt?

Der Kreis wird immer kleiner − bis er zu einem Punkt entartet. Auch das ist noch vorstellbar. Aber dann: aus dem Punkt entsteht wieder ein Kreis − vor uns, und er wächst zur Ausgangslage zurück. Was ist der Punkt in diesem Moment? Ein Punkt hat keinen Radius, keine Fläche, keine Richtung. Wie kann aus ihm ein Kreis hervorgehen?

Beide Male haben wir dasselbe strukturelle Problem: ein Übergang durch eine Entartung hindurch − durch etwas, das nicht mehr als Kreis erscheint, aber aus dem ein Kreis wieder wird.

Diese zwei Fragen nehmen wir mit. Sie werden uns die ganze Epoche begleiten.

Lehrernotiz zur 3. Stunde

Methodisch-didaktische Hinweise

Lehrernotiz

Die 3. Stunde ist das Herzstück der Einleitung. Die Körperübung führt den vollständigen Zyklus der Kreisumstülpung durch. Am Ende stehen zwei Denkprobleme − nicht als Lehrerfragen, sondern als Klassenfragen. Die Stunde darf nicht mit einer Antwort enden.

- Zur Körperübung:
- Die drei Durchgänge haben je einen Beobachtungsauftrag. Nicht alle drei gleichzeitig stellen − nacheinander, mit Zeit dazwischen.

- Die anatomische Grenze ist didaktisch wertvoll: genau dort, wo die Arme nicht mehr folgen können, muss die Vorstellung einspringen. Den Schülern dies bewusst machen: «Ab hier *denken* wir weiter.»
- Der Wechsel von innen und außen ist schwer zu fassen. Kein Schüler wird es beim ersten Durchgang klar sehen. Es genügt, die Frage zu stellen.

Zum Überblick:

- Die Tafelabfolge entsteht aus den Worten der Schüler, nicht des Lehrers. Der Lehrer moderiert, fragt nach, ordnet − aber schreibt, was die Klasse sagt.
- Die Abfolge an der Tafel schweigend stehen lassen, bevor die nächste Frage gestellt wird. Die Schüler sollen sie sehen und wirken lassen.
- Kreis → Gerade → Kreis → Punkt → Kreis: diese fünfgliedrige Folge ist das Gerippe der ganzen Epoche. Sie wird später mehrfach wieder aufgegriffen.

Zu den zwei Denkproblemen:

- Nicht der Lehrer formuliert sie − er fragt: „Wo haben wir ein ernstes Denkproblem?“ Und wartet. Die Schüler werden es benennen.
- Was auch immer kommt, wird an die Tafel geschrieben − in den Worten der Schüler. Das gibt den Fragen Würde und Ernsthaftigkeit.
- Beide Denkprobleme haben dieselbe Struktur: ein Übergang durch eine Entartung hindurch. Das muss nicht explizit gesagt werden − es wird sich im Laufe der Epoche von selbst zeigen.
- Verbindung zur 1. Stunde: auch dort gab es einen Übergang durch eine Entartung − den Sprung des Schnittpunkts C durch den Punkt im Unendlichen auf die Rückseite. Die Schüler, die das erinnern, werden die Parallele selbst ziehen.

Zum Abschluss:

- Kein Versprechen machen, wann die Fragen beantwortet werden. Nur: „Diese Fragen begleiten uns.“
- Die Stunde endet mit den zwei Fragen an der Tafel − nicht mit einer Zusammenfassung.

4. Stunde − Durch den Abgrund

Epochenheft-Eintrag 4. Stunde

Ausgangspunkt: die zwei offenen Fragen

Aus der 3. Stunde standen noch zwei Fragen im Raum:

Kreis (vorne) → Gerade → Kreis (hinten) → Punkt → Kreis (vorne)
1. Was geschieht im Übergang durch die Gerade?
2. Was geschieht im Übergang durch den Punkt?

Heute betrachten wir genau, was wir getan haben − und was uns durch diese beiden Übergänge getragen hat.

Der Abgrund: Kreis → Gerade

Als der Kreis zur Geraden wurde, sagte uns die Beobachtung: hier ist Schluss. Es gibt keinen Kreis mehr. Die Kreisgesetze sind nicht anwendbar − eine Gerade hat keinen Mittelpunkt, keinen Radius, kein Innen und Außen. Wir fallen in eine gesetzlose Finsternis.

Und doch: wir haben nicht aufgehört. Wir haben unseren Willensimpuls, unsere Bewegung − den gleichmäßigen Druck, der zuvor die Kreisgesetze bestätigte − einfach fortgesetzt. Wir haben uns durch das Erlebnis des Abgrundes nicht beirren lassen. Und daraus entstand der Kreis nach hinten.

Was hat uns durch diesen Abgrund getragen? Wir selber durch unseren Willen, der in der Finsternis der Gesetzlosigkeit einfach im Glauben an die Kreisgesetze fortfuhr. Wir gelobten (glaubten) dass sie weiter gelten, nicht im Sichtbaren, sondern im Unsichtbaren, in uns selber. Wir können genau benennen, wie dies geschah:

– Unsere dehnende Bewegung hat sich nicht geändert. Die Richtung des Drucks war vor dem Abgrund derselbe wie nach ihm.
– Die Kreisgesetze galten bis zur Geraden − wir haben sie im Abgrund nicht fallen lassen, sondern innerlich − ohne äußere Anschauung − festgehalten.
– Das heißt: Unser Denkwille hat der Wahrnehmung nicht nachgegeben. Die Beobachtung sagte ‹hier ist Schluss!› − der Wille sagte ‹wir gehen weiter!›.

Der Durchgang durch die Gerade geschah also durch den dem Kreisgesetz unverbrüchlich treuen Denkwillen. Nicht durch einen Sprung ins Unbekannte − sondern durch das konsequente Festhalten und Weiterdenken des Gesetzes über seine eigene ‹sichtbare› Grenze hinaus.

> **Der Denkwille, der dem Gesetz im Bewusstsein treu bleibt, trägt uns durch den Abgrund.**

Der Nullpunkt: Kreis → Punkt

Der zweite Übergang ist von anderer Art. Beim Durchgang durch die Gerade hatte der Denkwille noch einen Leitfaden: die Richtung der Bewegung war klar, der Druck wurde von uns unverändert fortgesetzt. Das Kreisgesetz schwieg zwar − aber die Bewegung selbst trug weiter.

Beim Durchgang durch den Punkt aber fallen auch diese Hilfsmittel weg:

- Der Punkt hat keine Richtung. Kein Wohin. Keine Haltepunkte. Kein ‹außen›. Kein ‹innen›. Keine Linie. Keine Ausdehnung. Gar nicht mehr von den Elementen des Kreises ist noch irgendwie da. Die Kreisgesetze schweigen vollständig.
- Unsere Bewegung − der Druck im Kreise nach außen, an der Geraden nach hinten − hat hier keinen Ansatzpunkt mehr. Die Ansatzpunkte dafür sind im Punkt selber verschwunden. Wir stehen hilflos vor einem Nichts. Null. Nitschewo?

Der Denkwille, der beim ersten Abgrund noch dem Kreisgesetz folgen konnte, steht hier vor etwas qualitativ anderem. Es gibt kein Gesetz mehr, an das er glauben, an dessen Elementen er ihm folgen könnte. Und trotzdem − auch hier − entstand im Durchgang wieder ein Kreis, wieder nach vorne.

Was trägt uns durch den zweiten Abgrund, den Nullpunkt?

Diese Frage können wir heute noch nicht beantworten. Sie ist tiefer als die erste. Beim ersten Abgrund half uns das Gesetz − hier hört das Gesetz selbst auf. Was jenseits des Gesetzes liegt, werden wir im Verlauf dieser Epoche suchen.

Ergebnis: zwei Abgründe − strukturell verschieden

Beide Übergänge − durch die Gerade und durch den Punkt − sind Orte, wo die Kreisgesetze nicht mehr gelten. Aber sie sind nicht gleich:

- Beim Übergang durch die Gerade: das Gesetz trägt uns hindurch, wenn wir ihm treu bleiben. Der Denkwille findet einen Leitfaden.
- Beim Übergang durch den Punkt: das Gesetz selbst hört auf. Der Denkwille findet keinen Leitfaden mehr.

Wir haben beide Male die Kreisgesetze nicht verletzt − wir sind ihnen treu gefolgt. Und sie selbst haben uns an Orte geführt, wo sie nicht mehr gelten. Die Gesetze wurden durch unsere Aktion außer Kraft gesetzt, *indem wir ihnen folgten.*

> **Die Gesetze haben uns über ihre eigene Grenze hinausgeführt. Das ist kein Fehler − das ist ein Hinweis auf etwas, das jenseits der gewöhnlichen Geometrie liegt.**

Lehrernotiz zur 4. Stunde

Methodisch-didaktische Hinweise

Lehrernotiz

Die 4. Stunde ist eine Reflexionsstunde − keine neue Körperübung, keine neue Konstruktion. Die Schüler betrachten genau, was sie in den vorigen Stunden getan haben, und heben ins Bewusstsein, was sie bereits vollzogen haben, ohne es vollständig zu wissen.

Zum ersten Abgrund (Gerade):

- Die Schüler sollen die Entdeckung selbst formulieren. Der Lehrer fragt: «Was hat uns durch die Gerade hindurchgetragen?» und wartet. Die Antwort kommt aus der Klasse.
- Das Ziel ist präzise Sprache: nicht bloß ‹wir haben einfach weitergemacht›, sondern: der dem Kreisgesetz treue Denkwille hat die Beobachtung (die Gerade ist das Ende des Kreises) überschrieben.
- Die Unterscheidung zwischen Wahrnehmung (‹hier ist Schluss›) und Denkwille (‹unbeirrt weiter›) ist der Kern. Sie darf nicht vom Lehrer eingebracht werden − sie muss von den Schülern erarbeitet werden.
- Erst wenn diese Unterscheidung klar ist, wird das Ergebnis an die Tafel geschrieben.

Zum zweiten Abgrund (Nullpunkt):

- Hier ist Vorsicht geboten: nicht zu viel sagen. Das Problem wird nur angedeutet, nicht gelöst.
- Die Frage ‹Wo ist innen, wo ist außen, wenn wir im Punkt angelangt sind?› genügt als Impuls. Die Schüler werden spüren, dass hier etwas qualitativ anderes vorliegt als beim ersten Abgrund.
- Nicht versuchen, den zweiten Abgrund durch den ersten zu erklären. Sie sind verschieden. Das innere Verhältnis der beiden muss offen bleiben.

Zur erkenntnistheoretischen Dimension:

- Die Pointe − die Gesetze haben sich im Denken selbst überschritten − ist die Brücke zu Cusanus. Sie muss nicht explizit genannt werden. Es genügt, wenn die Schüler das Ergebnis in Worte fassen.
- Wer Cusanus bereits kennt, wird die Verbindung zur docta ignorantia selbst ziehen. Wer nicht, wird sie später ziehen.
- Die Verbindung zur 1. Stunde ist ebenfalls möglich: auch dort hat der Denkwille die Beobachtung überschritten − als C ins Unendliche flog und wir die Geraden der Dreiecksseiten trotzdem weitergedacht haben.

Zum Stundenabschluss:

- Die Stunde endet mit zwei Ergebnissen an der Tafel: das erste aufgehellt, das zweite offen.
- Das offene zweite Ergebnis ist bewusst: es ist die eigentliche Frage der Epoche. Erst wenn die Schüler sie wirklich als Frage empfinden − nicht als Lücke, sondern als Rätsel − ist der Boden für die projektive Geometrie bereitet.

5. Stunde − Das erste Extrem: der Kreis wird zur Geraden

Epochenheft-Eintrag 5. Stunde

Einführung der Farbgebung

Um die Umstülpung des Kreises anschaulich verfolgen zu können, färben wir die beiden Flächen:

> **Kreisinnenfläche: gelb**
>
> **Kreisaußenfläche: blau**

Diese Farbgebung begleitet uns durch den gesamten Zyklus der Umstülpung und hilft uns, zu verfolgen, was mit Innen und Außen geschieht.

Was geschieht mit den Kreiselementen im ersten Extremmoment?

Wir gehen die Kreiselemente der Reihe nach durch und beobachten, was aus ihnen wird, wenn der Kreis zur Geraden entartet.

Mittelpunkt M

1. ***Ausgangslage:***
   M liegt im Inneren des Kreises, vor uns im Blickfeld.
2. ***Bei der Dehnung:***
   M entfernt sich von unserem Standpunkt (6 Uhr) nach vorne (12 Uhr), mit wachsender Geschwindigkeit. Die Bewegung von M verläuft entlang der Geraden des Durchmessers, die senkrecht auf der Basis-Geraden steht. Wir halten fest: Diese Gerade schneidet die Kreislinie nicht bloß im unserem Fußpunkt, sondern auch im Punkt Q. Der Abstand von M zu Q ist gleich der Abstand vom Fußpunkt zu M.
3. ***Im Extremmoment:***
   M ist ins Unendliche geflohen. Er ist nicht mehr als ein lokalisierbarer Punkt in der Ebene vorhanden. Der ihm gegenüberliegende Punkt Q auf der Kreislinie − der uns auf dem senkrechten Durchmesser direkt mit doppeltem Abstand gegenüberlag − ist ebenfalls ins Unendliche geflohen. M und Q fallen im Übergang ins Unendliche auf dem senkrechten Durchmesser zusammen.

Radien / Durchmesser

1. ***Ausgangslage:***
   Der Radius ist die Strecke von M zu einem Kreispunkt. Der Durchmesser ist die doppelte Strecke durch M. Beide sind endlich.
2. ***Bei der Dehnung:***
   Radien und Durchmesser werden länger.
3. ***Im Extremmoment:***

Der Begriff der Strecke löst sich auf. Radien und Durchmesser werden zu unendlichen Geraden, die miteinander parallel und senkrecht auf der Basis-Geraden stehen. Diese Radius-Geraden aber haben von unserem Standpunkt aus zwei Hälften − eine vor uns, eine hinter uns. Das Kreisgesetz verlangt weiterhin: alle Radien schneiden sich in M. Aber diese Geraden sind nun parallel − und parallele Geraden haben in der euklidischen Geometrie keinen Schnittpunkt. Das Kreisgesetz führt uns zur Notwendigkeit: M muss der Schnittpunkt aller parallelen Radius-Geraden sein − zugleich vor uns und hinter uns. Das ist der Punkt im Unendlichen, auch Peripheriepunkt genannt. Ein häufiger Fehlschluss ist der, dass die Verbindung aller parallelen Radien nicht ein Punkt, sondern wieder eine Gerade sei.

Kreislinie

1. ***Ausgangslage:***
   Die Kreislinie ist der Ort aller Punkte mit gleichem Abstand von M.
2. ***Bei der Dehnung:***
   Die Kreislinie wird flacher und gestreckter. Die Krümmung nimmt ab.
3. ***Im Extremmoment:***
   Die Kreislinie ist zur Basis-Geraden geworden. Jeder Punkt auf dieser Geraden hat denselben − unendlichen − Abstand von M. Das Kreisgesetz gilt weiterhin: die Gerade ist ein Kreis mit dem Mittelpunkt im Unendlichen.

Kreisinnenfläche / Kreisaußenfläche

1. ***Ausgangslage:***
   Die Kreisinnenfläche (gelb) ist endlich. Die Kreisaußenfläche (blau) ist unendlich. Der Kreis teilt die unendliche Ebene asymmetrisch.
2. ***Bei der Dehnung:***
   Das Gelbe wächst. Die Grenze zwischen Gelb und Blau − die Kreislinie − rückt weiter hinaus.
3. ***Im Extremmoment:***
   Die Basis-Gerade teilt die Ebene in zwei Halbebenen. Beide sind unendlich groß − die Asymmetrie zwischen endlichem Innen und unendlichem Außen verschwindet. Die vordere Halbebene ist gelb (ehemaliges Inneres), die hintere blau (ehemaliges Äußeres). Im Durchgang durch die Gerade, sind die Innen- und die Außenfläche über die Unendlichkeit eine einzige Fläche. Ohre Verbindung entsteht im Unendlichen (nach vorne und nach hinten).

   Nach dem Durchgang durch die Gerade hat der neue Kreis hinter uns eine blaue Innenfläche und eine gelbe Außenfläche − Gelb und Blau haben die Seiten gewechselt. Was beim zweiten Extremmoment − dem Punkt − mit den Farben geschieht, werden wir später untersuchen.

Sehne

1. ***Ausgangslage:***
   Die Sehne verbindet zwei Kreispunkte und liegt vollständig im gelben Inneren des Kreises.

2. ***Bei der Dehnung:***

   Die Sehne wird länger, bleibt im Gelben. Liegt sie anfangs parallel zuur Basislinie vor dem Mittelpunkt, so wandert sie auf uns zu in Richtung 6 Uhr. Im andern Fall nach vorne nach 12 Uhr.

3. ***Im Extremmoment:***

   Die ‹untere› Sehne liegt jetzt auf der Basis-Geraden und ist mit ihr verschmolzen. Sie ist eine Strecke auf der Grenze zwischen Gelb und Blau. Die ‹obere› Sehne verschmilzt ‹auf der anderen Seite› mit der Basisgeraden. Schräge Sehnen drehen sich in beide Richtungen zu der Basisgeraden, die ja als unendlich – und damit als unendlicher Kreis zu denken ist.

Sekante

Wir betrachten zwei Fälle:

Sekante 1 − durch die beiden Haltepunkte (4 Uhr und 8 Uhr):

1. ***Ausgangslage:***

   Die Sekante schneidet die Kreislinie in den beiden Haltepunkten. Die Sehne zwischen ihnen liegt im Gelben.

2. ***Bei der Dehnung:***

   Die Haltepunkte bleiben fix. Der Kreisbogen zwischen ihnen wird flacher.

3. ***Im Extremmoment:***

   Beide Haltepunkte liegen auf der Basis-Geraden. Die Sekante fällt mit der Basis-Geraden zusammen. Die Sehne ist eine Strecke auf der Basis-Geraden.

Sekante 2 − schräg, vom linken Haltepunkt zu einem Punkt rechts vom rechten Haltepunkt und umgekehrt:

1. ***Ausgangslage:***

   Die Sekante schneidet die Kreislinie in zwei Punkten und liegt schräg zur Basis-Geraden.

2. ***Bei der Dehnung:***

   Beide Schnittpunkte wandern auf der Kreislinie zur Basis-Geraden hin. Der Winkel zwischen der Sekante und der Basis-Geraden nimmt schrittweise ab.

3. ***Im Extremmoment:***

   Beide Schnittpunkte liegen auf der Basis-Geraden. Die Sekante fällt mit der Basis-Geraden zusammen. Siehe oben: Sehne.

Tangente

1. ***Ausgangslage:***

   Jede Tangente berührt die Kreislinie in genau einem Punkt. Der Radius steht im Berührungspunkt senkrecht auf der Tangente. Die Tangenten bilden um den Kreis ein dichtes Bündel mit einem Loch in der Mitte − dem Kreis selbst.

2. ***Bei der Dehnung:***

   Bei der Dehnung schmiegen die Tangenten sich immer mehr an die Kreislinie an.

3. ***Im Extremmoment:***
   Alle Radien sind zu senkrechten Geraden geworden. Die Tangenten sind orthogonal zu diesen Radius-Geraden − sie fallen alle mit der Basis-Geraden zusammen. Die Tangente in jedem Punkt der Basis-Geraden ist die Basis-Gerade selbst.

Die Basis-Gerade ist zugleich Kreislinie, Sehne, Sekante und Tangente − alle fallen im Extremmoment zusammen.

Passante

Wir betrachten drei Fälle von Passanten in der blauen Kreisaußenfläche:

Passante 1 geht durch einen Punkt außerhalb des Kreises und ist parallel zur Basisgeraden:

1. ***Ausgangslage:***
   Die Passante liegt im Blauen.
2. ***Bei der Dehnung:***
   Bei der Dehnung des Kreises rückt sie an die Kreislinie heran.
3. ***Im Extremmoment:***
   Der Punkt ist ein Element der Basis-Geraden geworden.

Passante 2 − eine schräge Passante:

1. ***Ausgangslage:***
   Die Gerade liegt schräg zur Basis-Geraden im Blauen.
2. ***Bei der Dehnung:***
   Die Schräge nimmt schrittweise ab − die Passante richtet sich auf.
3. ***Im Extremmoment:***
   Die Passante fällt mit der Basis-Geraden zusammen.

Passante 3 − eine Passante orthogonal zur Durchmesser-Geraden:

1. ***Ausgangslage:***
   Die Gerade steht senkrecht auf dem Durchmesser und liegt ganz im Blauen.
2. ***Bei der Dehnung:***
   Die Kreislinie dehnt sich aus und rückt an die Passante heran.
3. ***Im Extremmoment:***
   Die Passante fällt mit der Basis-Geraden zusammen.

Umfangswinkel / Zentriwinkel

1. ***Ausgangslage:***
   Der Zentriwinkel hat seinen Scheitel in M, seine Schenkel sind zwei Radien durch A und B auf der Kreislinie, Der Umfangswinkel hat seinen Scheitelpunkt Q auf der Kreislinie; seine Schenkel sind Strecken von Sekanten, sie verbinden ihn mit den anderen Kreispunkten zum Beispiel auch A und B. Er beträgt stets die Hälfte des zugehörigen Zentriwinkels.
2. ***Bei der Dehnung:***

Der Scheitelpunkt und seine beiden Fußpunkte wandern auf der Kreislinie − in entgegengesetzter Richtung: die Fußpunkte nach unten 6 Uhr zur Basis-Geraden, der Scheitelpunkt nach vorne 12 Uhr. Umfangswinkel und Zentriwinkel schrumpfen.

3. ***Im Extremmoment:***

   Der Scheitelpunkt Q fällt mit M im unendlich fernen Punkt zusammen. Beide Fußpunkte liegen auf der Basis-Geraden. Die Schenkel stehen senkrecht auf der Basis-Geraden − sie sind parallel zu beliebigen Radius-Geraden. Umfangswinkel und Zentriwinkel sind 0° geworden − die Schenkel schneiden sich im unendlich fernen Punkt.

Kreissektor

1. ***Ausgangslage:***

   Der Kreissektor ist ein Kuchenstück − begrenzt von zwei Radien und dem Kreisbogen zwischen ihnen. Er liegt in der gelben Kreisinnenfläche.

2. ***Bei der Dehnung:***

   Die beiden Radien werden länger, der Kreisbogen flacher. Nicht die Breite, aber die Länge des Kuchenstücks wächst.

3. ***Im Extremmoment:***

   Die Radien sind zu parallelen, senkrechten Geraden geworden. Der Kreisbogen ist zur Basis-Geraden geworden. Vor uns entsteht ein gelber Streifen − ein Rechteck, dem die obere Seite fehlt. Da die Radien als Geraden nach hinten weitergedacht werden müssen, entsteht hinter uns ein blauer Streifen − ebenfalls ein Rechteck, dem die hintere Seite fehlt.

Wo ist die fehlende vierte Seite beider Rechtecke? − Diese Frage nehmen wir mit.

Kreissegment

1. ***Ausgangslage:***

   Das Kreissegment ist der von einer Sehne abgetrennte Abschnitt der Kreisinnenfläche. Es liegt im Gelben, begrenzt von der Sehne zwischen A und B und dem zugehörigen Kreisbogen.

2. ***Bei der Dehnung:***

   Die Sehne wandert zur Basis-Geraden hin, der Kreisbogen wird flacher. Die Grenze des Segments wird ebenso flacher.

3. ***Im Extremmoment:***

   Die Sehne fällt mit der Basis-Geraden zusammen, der Kreisbogen ebenfalls. Sehne und Bogen sind ununterscheidbar geworden − das Segment hat keine Dicke mehr. Es ist zur Strecke auf der Basis-Geraden entartet.

Lehrernotiz zur 5. Stunde

Methodisch-didaktische Hinweise

Lehrernotiz

Der Stoff dieser Stunde ist umfangreich. Je nach Klassensituation und Gesprächstiefe kann er auf zwei Stunden verteilt werden. Eine mögliche Teilung: Stunde 5 bis einschließlich Tangente, Stunde 6 ab Passante.

Zur Farbgebung:

- Die Einführung von Gelb (innen) und Blau (außen) sollte visuell geschehen − an der Tafel, mit farbiger Kreide oder Folie. Die Schüler können ihre Epochenhefte entsprechend ausmalen.
- Die Farben sind kein dekoratives Mittel, sondern ein Denkwerkzeug. Sie machen die Topologie der Umstülpung sichtbar und werden beim zweiten Extremmoment (Punkt) erneut gebraucht.

Zur Methode:

- Die dreistufige Struktur (Ausgangslage / Bei der Dehnung / Im Extremmoment) ist für jedes Element gleich. Das gibt den Schülern Sicherheit und Orientierung.
- Die Schüler sollen die Beobachtungen möglichst selbst formulieren − der Lehrer ergänzt und präzisiert.
- Nicht alle Elemente brauchen gleich viel Zeit. Mittelpunkt, Radius und Kreislinie sind die tragenden − hier ist Tiefe wichtiger als Geschwindigkeit.

Zur Passante − offene Frage (Lehrernotiz):

- Eine Passante parallel zur Durchmesser-Geraden (also senkrecht zur Basis-Geraden) verhält sich anders als die drei beschriebenen Fälle: sie weicht nicht zur Basis-Geraden hin, sondern bleibt senkrecht. Sie wird zur Radius-Geraden selbst. Dieser Fall ist noch nicht vollständig geklärt und gehört nicht in den Schülereintrag.

Zur offenen Frage beim Kreissektor:

- Die fehlende vierte Seite der Rechtecke ist kein Fehler, sondern ein Rätsel. Es deutet auf die Ferngerade der projektiven Geometrie hin − aber dieser Begriff soll hier noch nicht eingeführt werden. Die Frage bleibt offen.

Zur Zusammenfassung am Stundenende:

- An der Tafel steht am Ende: Der Kreis ist Gerade, Punkt, Dreieck und Rechtreck zugleich.
- Denn: die Basis-Gerade ist zugleich Kreislinie, Sehne, Sekante und Tangente. Dieser Satz darf ruhig schweigend wirken.
- Die offene Frage zur vierten Seite der Rechtecke wird nicht beantwortet − sie wird mitgenommen.

6. Stunde − Der Peripheriepunkt und die Coincidentia Oppositorum

Epochenheft-Eintrag 6. Stunde

Der Peripheriepunkt − Fazit

Der unendlich ferne Punkt ist der unsichtbare, zu denkende geometrische Ort, in dem der Mittelpunkt M und der Punkt Q im Extremfall des 1. Abgrundes − wenn der Kreis zur Geraden entartet – übergehen und in dem alle parallel gewordenen Radien sich schneiden, und in dem die Basisgerade von unserem Fußpunkt aus gesehen nach links und rechts ihr Ziel beziehungsweise ihren Ursprung hat. In ihm wird die Gerade zum unendlichen Kreis, indem sie sich selber findet.

Wir nennen ihn den *Peripheriepunkt*: nicht Fernpunkt, denn er liegt nicht nur fern in einer Richtung. Er liegt in allen Richtungen zugleich − im Norden, Süden, Osten und Westen gleichzeitig. Er bildet also eine unendlich große *Hülle* um unsere gesamte Geometrie.

Erste Metapher − der Luftballon

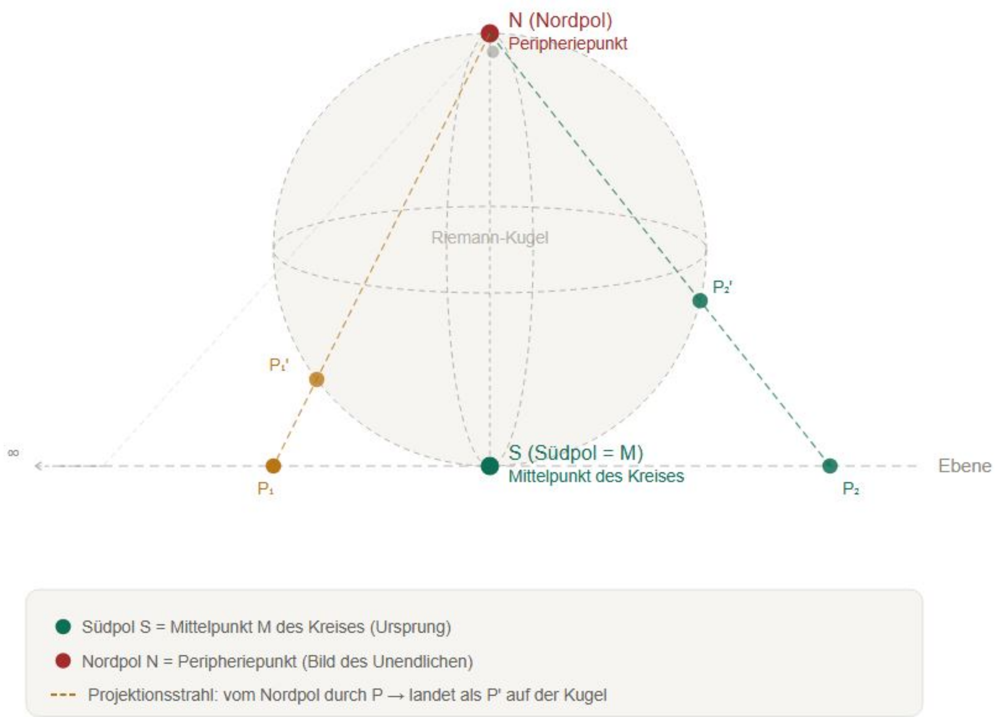
Stellt euch vor, wir blasen einen gelben Luftballon im blauen Raum immer weiter auf. Er wird so riesig, dass seine Gummihaut schließlich den gesamten Raum einnimmt und am Ende das gesamte Universum von außen umschließt. Diese umschließende Haut ist der unendlich große Kreis − und jeder Teil dieser Haut ist gleichzeitig der eine, unendlich ferne Punkt.

Zweite Metapher − Osten und Westen

Wenn du unendlich weit nach Osten gehst, erreichst du das Unendliche. Wenn du unendlich weit nach Westen gehst, auch. Da es aber nur einen unendlich fernen Punkt gibt, bedeutet das: Osten und Westen sind im Unendlichen derselbe Ort. Der Peripheriepunkt ist kein Ort, an dem man ankommt − er ist eine unendlich große Umarmung um unsere gesamte Geometrie.

Die ‹Riemann-Kugel›

Die Riemann-Kugel macht dies anschaulich: Ihr Südpol liegt im Mittelpunkt M unseres Kreises. Punkte der Ebene werden vom Nordpol aus − oder, umgekehrt gedacht: in Richtung Nordpol − auf die Kugeloberfläche projiziert. Je weiter ein Punkt von M entfernt ist, desto näher landet sein Bild am Nordpol. Der Nordpol selbst ist der Peripheriepunkt: das Bild aller unendlich fernen Punkte, aus allen Richtungen zugleich.



]

Die Kern-Erkenntnis nach Nikolaus von Kues

Wenn der unendlich ferne Punkt den gesamten Raum umschließt, verhält er sich wie eine einzige, unteilbare Einheit − genau wie der Nullpunkt, wie wir noch sehen werden. Im Unendlichen fallen das Maximum (unendlich groß) und das Minimum (unendlich klein) zusammen. Der unendlich ferne Punkt IST der unendlich kleine Punkt, wenn man die Perspektive wechselt.

> *„Die größte und die kleinste aller Zahlen sind ein und dasselbe."* − Nikolaus von Kues, De docta ignorantia

Wohin kommt man, wenn man einfach weitermacht und durch die Hülle des Peripheriepunktes durchstößt?

Lehrernotiz zur 6. Stunde

Unterrichtsgespräch: Peripheriepunkt und Coincidentia Oppositorum

Lehrernotiz

Die folgenden zwei Lehrerfragen führen die Schüler zur Coincidentia Oppositorum − dem Zusammenfallen der Gegensätze bei Cusanus. Sie sollen nicht erklärt, sondern erlebt werden.

1. Lehrerfrage − die Himmelsrichtungen

Lehrerfrage: *Wenn wir uns die parallelen Radien anschauen, die nach oben zeigen: Wir haben mathematisch bewiesen, dass sie sich im unendlich fernen Punkt im Norden treffen müssen. Wenn wir nun aber die Radien nach rechts (Osten) oder links (Westen) unendlich weit verlängern − treffen die sich auch irgendwo?*

> **Erwartete Schülerantwort:** *Nein, die fliegen ja in völlig andere Richtungen. Die im Osten fliegen nach rechts, die im Westen nach links. Die können sich nie treffen.*

Lehrer: (Cusanische Konter) Erinnert euch an die Definition des unendlichen Kreises. Ein Kreis umschließt immer seinen Mittelpunkt. Wenn die Radien in alle Himmelsrichtungen fliegen und per Definition alle im Mittelpunkt M starten, dann muss dieser unendlich ferne Punkt (M im Unendlichen) in jeder Himmelsrichtung gleichzeitig sein. Wie kann ein einziger Punkt überall am Rand unserer Welt sein?

2. Lehrerfrage − die zwei Raumschiffe

Lehrerfrage: *Stellt euch vor, zwei Raumschiffe starten am Ursprung (0,0). Raumschiff A fliegt auf der X-Achse mit Überlichtgeschwindigkeit nach Osten (rechts). Raumschiff B fliegt nach Westen (links). Beide fliegen bis ans Ende der Unendlichkeit. Was passiert, wenn sie den unendlich fernen peripheren Punkt erreichen?*

> **Schüler 1:** *Sie sind unendlich weit voneinander entfernt.*
>
> **Schüler 2 (hat Cusanus verstanden):** *Sie krachen ineinander!*

Lehrer: Sie krachen ineinander! Weil es im unendlichen Kreis nur einen unendlich fernen Mittelpunkt gibt, fallen der unendliche Osten und der unendliche Westen an diesem Umschlagplatz zusammen. Die unendliche Weite biegt sich im Unendlichen zu einem einzigen Punkt zusammen. Der Punkt ist so groß, dass er die ganze Welt umarmt.

Das Zusammenfallen der Gegensätze − Coincidentia Oppositorum

Lehrerfrage: *Wir haben zwei Umstülpungen gesehen. Die erste durch die unendliche Gerade (Umschlag I) und die zweite durch den winzigen Punkt im Ursprung (Umschlag II). Was ist der Unterschied zwischen der unendlichen Geraden und dem winzigen Punkt?*

> **Erwartete Schülerbeobachtung:** *Das eine ist das Größtmögliche, das andere das Kleinstmögliche.*

Lehrernotiz

Genau hier liegt der Kern der Coincidentia Oppositorum: das Größte und das Kleinste fallen zusammen. Die unendlich große Gerade und der unendlich kleine Punkt sind zwei Seiten derselben Wirklichkeit − des Peripheriepunktes.

- Die Schlussfrage (Wohin kommt man, wenn man durch die Hülle des Peripheriepunktes durchstößt?) bleibt bewusst offen. Sie ist die Brücke zur mathematischen Konstruktion der Kreisumstülpung, die in den folgenden Stunden folgt.
- Das Cusanus-Zitat kann an die Tafel geschrieben werden − ohne Kommentar. Es wirkt als Abschluss.
- Die Raumschiff-Metapher ist für die Schüler einprägsam. Sie kann in späteren Stunden als Anker dienen.

7. Stunde − Das zweite Extrem: der Nullpunkt-Durchgang

Epochenheft-Eintrag 7. Stunde

Einstieg: die Schlussfrage der vorigen Stunde

Wohin kommt man, wenn man ‹einfach weitermacht› und durch die Hülle des Peripheriepunktes durchstößt?

In unserer Alltagserfahrung hat jede Mauer eine Vorder- und eine Rückseite. Jede Hülle hat ein Innen und ein Außen. Wenn wir eine Wand durchbrechen, kommen wir auf die andere Seite − wir sind „draußen“. Das ist unsere vertraute Raumerfahrung.

Aber für den Peripheriepunkt gilt das nicht. Er ist nicht eine Hülle wie eine Wand oder eine Kugelschale. Er ist die Grenze des Unendlichen − und das Unendliche hat kein Außen. Denn wenn es ein Außen gäbe, wäre das Unendliche nicht wirklich unendlich − es wäre begrenzt durch das, was jenseits seiner Hülle liegt.

Es gibt keinen Raum außerhalb des unendlichen Kreises. Das Unendliche beinhaltet per Definition bereits alles. Jeder Versuch, ‹durch die Hülle hindurch› nach draußen zu denken, scheitert − nicht an unserer Denkfähigkeit, sondern an der Sache selbst. Das Außen, das wir suchen, existiert nicht.

Was aber geschieht dann mit dem Denkwillen, der durch die Hülle stoßen will?

Er wird zurückgeworfen − aber nicht ins Leere. Er wird unmerklich umgelenkt. Wer im unendlichen Norden durch die Hülle bricht, kommt im unendlichen Süden wieder heraus. Die Hülle biegt den Raum in sich selbst zurück. Der Peripheriepunkt hat kein Außen − er hat nur ein Innen. Und dieses Innen ist die *ganze* Welt.

Hier zeigt sich die Coincidentia Oppositorum des Cusaners – der Zusammenfall der Gegensätze − in ihrer vollständigsten Form: das Maximum − der unendlich große Kreis, dessen Hülle alles umschließt − ist zugleich das Minimum. Denn wenn das Unendliche alles beinhaltet und kein Außen hat, dann ist es − von innen betrachtet − ein einziger Punkt. Nicht ein Punkt irgendwo in der Ebene, sondern der Punkt, von dem aus alles entfaltet wird und in den alles aufgenommen wird.

Das Durchstoßen durch den Peripheriepunkt ist der Weg zum Nullpunkt. Die subjektive Frage − wohin kommt man? − wird objektiv beantwortet:

> **Man kommt im Nullpunkt an.**

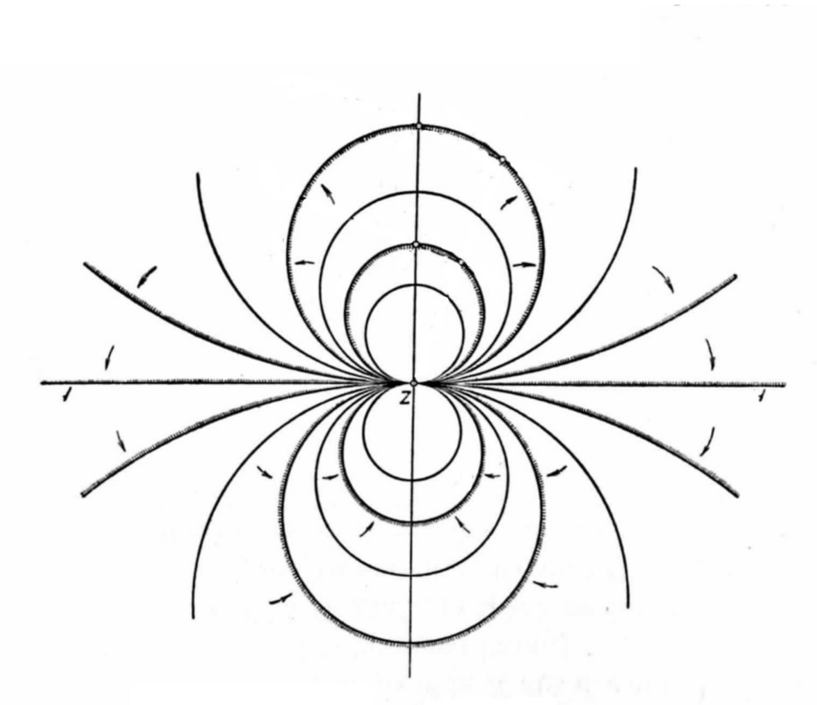
Der Widdersprung − warum wir zurückschauen müssen

Beim ersten Abgrund − als der Kreis zur Geraden wurde − hatten wir noch Hilfsmittel: die Radien, die Kreislinie, die Tangenten. Sie waren zwar entartet, aber noch denkbar. Wir konnten die Kreisgesetze festhalten und weitergehen. Daraus entstand der umgestülpte Kreis. Den haben wir konsequent weiter zusammengedrückt − bis hierher, bis zum Punkt.

Aber hier im Nullpunkt sind uns alle diese Hilfsmittel abhandengekommen. Der Radius hat die Länge null. Die Kreislinie ist verschwunden. Die Kreisgesetze schweigen vollständig. Wir sehen vor uns nichts mehr, woran wir uns halten könnten.

Weil wir nach vorne nichts mehr sehen, müssen wir zurückschauen. Nicht um umzukehren − sondern um den Anlauf zu nehmen. Nur im Rückblick können wir hier noch vorwärts.

Also: wie sind wir überhaupt hierhergekommen? Was hat uns bewegt? Wir haben gedrückt und gestaucht. Wir haben Kraft ausgeübt. Diese Kraft hatte eine Richtung. Zeichnen wir sie ein − als Kraft-Vektoren unserer Aktion.



Was geschieht mit den Kreiselementen im zweiten Extremmoment?

Wir verfolgen die wesentlichen Elemente − diesmal beim Zusammendrücken des hinteren Kreises bis zum Punkt.

Mittelpunkt M

1. ***Ausgangslage:***
   Der hintere Kreis hat seine Innenfläche blau, seine Außenfläche gelb. M liegt hinter uns.
2. ***Beim Zusammendrücken:***
   M kommt von weit hinten immer näher − er wandert auf unseren Standpunkt bei 6 Uhr zu.
3. ***Im Extremmoment:***

M fällt mit unserem Fußpunkt zusammen. Er ist nicht mehr vor uns, nicht mehr hinter uns − er ist bei uns. Oder besser: in uns. Der Kreis ist in den Punkt verschwunden. M ist ein Mittelpunkt ohne Kreis − ein Zentrum ohne Umkreis. Der subjektive Standpunkt des Beobachters und der objektive Mittelpunkt der Figur sind ein und derselbe Ort geworden.

Kreislinie

1. ***Ausgangslage:***

   Die Kreislinie ist der geometrische Ort aller Punkte mit gleichem Abstand r von M.

2. ***Beim Zusammendrücken:***

   Beim Zusammendrücken wird r immer kleiner. Die Kreislinie schrumpft, die Krümmung wird größer.

3. ***Im Extremmoment:***

   r = 0. Der geometrische Ort aller Punkte mit Abstand 0 von M ist M selbst. Die Kreislinie fällt mit dem Mittelpunkt zusammen − sie ist der Punkt.

Radius / Durchmesser

1. ***Ausgangslage:***

   Der Radius ist die Strecke von M zu einem Punkt auf der Kreislinie.

2. ***Beim Zusammendrücken:***

   Beim Zusammendrücken wird diese Strecke immer kürzer.

3. ***Im Extremmoment:***

   Der Radius hat die Länge null. Eine Strecke der Länge null ist kein Abschnitt mehr − sie ist ein Punkt. Aber dieser Punkt enthält noch die Richtung, aus der er kam. Alle Richtungen − Nord, Süd, Ost, West − sind in ihm versammelt, als einströmende Kraft-Vektoren.

Kreisinnenfläche / Kreisaußenfläche

Kreisinnenfläche des hinteren Kreises: blau

Kreisaußenfläche des hinteren Kreises: gelb

1. ***Ausgangslage:***

   Der hintere Kreis hat eine blaue Innenfläche und eine gelbe Außenfläche − die Farben sind seit der Umstülpung durch die Gerade vertauscht.

2. ***Beim Zusammendrücken:***

   Beim Zusammendrücken schrumpft das blaue Innen. Kurz vor dem Nullpunkt: ein winziger blauer Punkt in einer unendlichen gelben Ebene.

3. ***Im Extremmoment:***

   Der Radius wird null. Der Punkt hat keine Ausdehnung. Das Blaue verschwindet. Die gesamte Ebene ist gelb. Im Punkt selbst: kein Innen, kein Außen. Keine Farbe.

Die Kraft-Vektoren im Nullpunkt

Wir zeichnen die Richtungen unserer Aktion ein: beim Zusammendrücken zeigten alle Druckvektoren radial nach innen − aus allen Richtungen, von der gesamten Kreislinie her, auf M zu. Im Nullpunkt sind alle diese Vektoren versammelt.

Sie kommen aus dem Norden, Süden, Osten, Westen − und aus allen Zwischenrichtungen. Sie heben sich nicht auf. Sie sammeln sich im Punkt.

Und nun: wohin können sie von hier aus?

Was geschieht, wenn die im Nullpunkt versammelten Kraft-Vektoren ihre Kraft nicht verlieren und weiter drängen − was entsteht dann?

Lehrernotiz zur 7. Stunde

Methodisch-didaktische Hinweise

Lehrernotiz

Diese Stunde ist der philosophische und didaktische Höhepunkt der Einleitung. Zwei Gefahren drohen: (1) die Schüler werden mit dem Problem im Nullpunkt allein gelassen und werden ironisch; (2) der Lehrer oder ein schneller Schüler gibt die Lösung zu früh. Der Widdersprung ist die Methode, beide Gefahren zu umgehen.

Zum Einstieg:

- Die Schlussfrage der vorigen Stunde wird nicht vom Lehrer beantwortet − sie wird von der Klasse weitergedacht. Der Lehrer fragt: Was habt ihr euch überlegt? Die Schülerantworten werden aufgegriffen, ohne zitiert zu werden.
- Die Herleitung (kein Außen, Coincidentia Oppositorum, man kommt im Nullpunkt an) entfaltet sich im Unterrichtsgespräch. Der Lehrer führt, ohne zu erklären.

Zur erkenntnistheoretischen Dimension:

- Im Nullpunkt fallen subjektiver Standpunkt, von dem unsere Aktion ausgeht, und Mittelpunkt innerhalb der objektiven Kreisgeometrie zusammen. Das ist nicht nur eine geometrische Feststellung − es ist ein erkenntnistheoretisches Ereignis. Der Lehrer muss sich über diese Dimension klar sein, bevor er in die Stunde geht.
- Wie wird dieser Prozess überhaupt möglich? Der Beobachter beobachtet zwei Elemente: das Subjektive (seinen Standpunkt, seinen Denkwillen, seine Aktion) und das Objektive (den Kreis, seine Elemente). Im Nullpunkt fallen diese zusammen. Der Unterricht selbst vollzieht damit, was Cusanus beschreibt: das Zusammenfallen der größten Gegensätze.
- Davon hängt ab, wie der Lehrer den Nullpunkt-Durchgang didaktisch-pädagogisch bewusst machen kann − nicht als geometrisches Problem, sondern als Moment der Erkenntnis.

Zum Widdersprung:

- Der Widdersprung ist nicht eine didaktische Methode unter anderen − er ist hier geometrisch notwendig. Weil nach vorne nichts mehr zu sehen ist, muss zurückgeschaut werden. Und im Zurückschauen muss der Schüler nach vorne weitergehen können Das muss den Schülern als Notwendigkeit einleuchten, nicht als Lehrertrick.
- Die Einzeichnung der Kraft-Vektoren ist eine konkrete Aufgabe: die Schüler zeichnen in ihre Hefte die Vektoren ein, die beim Zusammendrücken des hinteren Kreises gewirkt haben. Radial nach innen, aus allen Richtungen.
- Die entscheidende Frage − was tun diese Vektoren im Nullpunkt? − wird nicht beantwortet. Sie ist die Schlussfrage der Stunde.

Zur Schlussfrage:

- Die Frage (Was entsteht, wenn die versammelten Kraft-Vektoren nach außen drängen?) bleibt offen. Die Schüler werden die Antwort ahnen − aber sie soll nicht ausgesprochen werden. Sie wird in der nächsten Stunde aus den Schülern selbst kommen.
- Der Moment des Nullpunkt-Durchgangs kann im Epochenrückblick für die Schüler nochmals erscheinen − wenn sie den ganzen Weg überblicken können.

8. Stunde − Die Explosion des Keims und der Ursprung des Kreises

---

Epochenheft-Eintrag 8. Stunde

Die Farbfrage − verschärft

Wir stehen vor einer Frage, die uns nicht loslässt: Im Nullpunkt sehen wir an der Tafel nur noch Gelb. Das Blaue ist verschwunden. Und doch soll nach dem Nullpunkt-Durchgang der neue Kreis innen gelb und außen blau sein. Aber woher kommt das Blau − wenn es doch nicht mehr da ist?

Die Schüler haben recht, wenn sie fragen: Wir können sagen, vorher war Gelb innen, Blau außen. Dann bei der Geraden oben Gelb, unten Blau. Nach der Umstülpung war das Blau innen und Gelb umgekehrt außen. Wir hatten immer die zwei Farben, der nächste Schritt war klar. Hier im Nullpunkt aber ist nichts klar. Welche Farbe hat die Innenfläche des aus dem Nullpunkt sprießenden neuen Kreises nun wirklich, wenn es doch kein Blau mehr gibt?

Wir brauchen einen anschaulichen Beweis.

Das Folien-Experiment

Wir nehmen zwei durchsichtige Plastikfolien: eine gelbe und eine blaue. Die gelbe stellt die unendliche Außenfläche dar. Die blaue liegt als Kreis darauf − sie ist die Innenfläche.

Kreisinnenfläche: blau (Folie liegt oben)
Kreisaußenfläche: gelb (Folie liegt unten)

1. ***Der Kreis schrumpft:***
   Die blaue Folie in Gedanken zusammengedrückt, immer kleiner − bis sie ein winziger Punkt wird. Die gelbe Folie bedeckt nun alles.
2. ***Der Nullpunkt:***
   Das Blaue ist zum unsichtbaren Keim als ein Nichts geworden. Wir wissen von ihm nur, weil wir den Prozess selbst vollzogen haben. Wir sehen ihn nicht. Die blaue Folie liegt noch da − aber als Punkt, unsichtbar klein. Das gesamte Sichtbare ist gelb. Das Blaue ist wie ein Samenkorn im Boden: nicht sichtbar, aber voller Potenz. Es ist zum Keim geworden.
3. ***Der Beweis − der Handschuh:***
   Wie geht es weiter? Wir kennen die Antwort aus dem Alltag: wenn wir einen Handschuh ausziehen und dabei umstülpen, kommt das Innere nach außen. Was innen war, ist außen. Was außen war, ist innen. Genau *so* verhält es sich

mit unserem Kreis: die blaue Folie, die innen lag, kommt durch die Umstülpung nach außen. Die gelbe Folie, die außen lag, kommt nach innen.

> **Der neue Kreis: innen gelb, außen blau. Der Zyklus ist geschlossen − bewiesen durch den Handschuh.**

Die Explosion des Keims

Aber nun das Unglaubliche. Wir halten inne und betrachten, was in dem Moment geschieht, wo der neue Kreis aus dem Nullpunkt hervorgeht.

Im Nullpunkt war das gesamte All gelb. Das Blaue war zum unsichtbaren Keim geschrumpft − wie ein Samenkorn, das die ganze Pflanze in sich trägt, ohne dass man es sieht.

Dann − in einer Millisekunde − ndert sich alles, als würde ein Schalter umgelegt.

Das gesamte All ist Blau.

Nicht allmählich. Nicht von innen nach außen wachsend. Sondern sofort − in einem einzigen Moment. Das Blaue, das im Keim gefangen war, ergießt sich in einer einzigen Explosion in den gesamten unendlichen Raum. Es ist überall – plötzlich und zugleich.

Und mitten in diesem blauen All − kaum wahrnehmbar, winzig klein − erscheint ein winziger gelber Kreis. Das Gelbe, das eben noch die gesamte unendliche Ebene füllte, ist in diesem Moment zu diesem winzigen Kreis zusammengezogen. Eingeschlossen. Begrenzt.

Das ist das Unglaubliche: das Allerkleinste − der unsichtbare blaue Keim − wird in einem einzigen Moment zum Allergrößten. Und das Allergrößte − das allgegenwärtige Gelb − wird zum Allerkleinsten.

> *«Die größte und die kleinste aller Zahlen sind ein und dasselbe.»* – Nikolaus von Kues, De docta ignorantia

Coincidentia Oppositorum. Nicht als Satz. Als Ereignis.

Der Ursprung des Kreises

Wir halten inne und schauen auf den Anfang zurück.

Am Anfang dieser Epoche stand ein überschaubarer Kreis vor uns. Er war einfach da. Wir haben ihn hingestellt und hingenommen − ohne zu fragen, woher er kommt. Seine Herkunft blieb dunkel. Wir haben ihn gedehnt, umgestülpt, zusammengedrückt, durch den Peripheriepunkt und zuletzt durch den Nullpunkt geführt. Und nun ist er wieder da: derselbe überschaubare Kreis, innen gelb, außen blau.

Aber jetzt wissen wir etwas, was wir am Anfang nicht wussten:

> **Dieser Kreis kommt aus dem Nullpunkt. Er ist nicht einfach da − er ist das Ergebnis einer Explosion aus dem unsichtbaren Keim.**

Er trägt seine ganze Geschichte in sich: die Gerade, den Peripheriepunkt, die Umstülpung, den Nullpunkt, die Explosion. All das ist in ihm − unsichtbar, aber real als Geschehen. Das Endliche ist nicht einfach da − es kommt aus dem Unendlichen. Der überschaubare Kreis vor uns ist die sichtbare Gestalt eines Prozesses, der durch das Unendliche hindurchgegangen ist.

Der Schluss erzeugt den Anfang. Das Ende erklärt den Ursprung.

Woher kommt ein Kreis? Was heißt das − und was folgt daraus?

Lehrernotiz zur 8. Stunde

Methodisch-didaktische Hinweise

Lehrernotiz

Die 8. Stunde hat drei Teile: den anschaulichen Farbbeweis, die Explosion des Keims als philosophisches Erlebnis, und die Rückwendung zum Anfang als erkenntnistheoretischer Abschluss der Einleitung.

Zur Explosion des Keims:

- Der Moment der Explosion soll nicht erklärt werden − er soll erlebt werden. Der Lehrer beschreibt ihn langsam, mit Pausen. Das Blaue war im Keim. Dann − in einer Millisekunde − ist das gesamte All blau.
- Der Keim-Vergleich verweist bewusst auf die Pflanze − dieser Vergleich wird später (Botanik-Epoche) wieder aufgegriffen. Hier nur andeuten, nicht ausführen.
- Der Vergleich mit der astrophysikalischen Explosion (Urknall) liegt nahe − aber noch nicht einführen. Er gehört in die spätere weltanschauliche Folgestunde.
- Die Coincidentia Oppositorum erscheint hier in ihrer reinsten Form: das Allerkleinste wird zum Allergrößten, das Allergrößte zum Allerkleinsten. Das ist kein philosophischer Satz mehr − es ist ein geometrisches Ereignis, das die Schüler mit eigenen Augen gesehen haben.

Zum Ursprung des Kreises:

- Die Rückwendung zum Anfang ist der eigentliche Abschluss der Einleitung. Der Lehrer zeigt auf den Kreis, den er am ersten Tag hingestellt hat, und fragt: Wussten wir damals, woher dieser Kreis kommt? Nein. Wissen wir es jetzt?
- Die Schlussfrage (Woher kommt ein Kreis? Was heißt das − und was folgt daraus?) wird nicht beantwortet. Sie ist der Einstieg in die nächste Stunde − die philosophische Vertiefung.
- Wichtig: diese Frage ist keine geometrische Frage. Sie ist eine philosophische. Die Schüler sollen sie als solche erkennen − als die eigentliche Frage, auf die die ganze Einleitung hingeführt hat.

Zum Stundenplan:

- Stunde 9: philosophische Erarbeitung der Frage nach dem Ursprung des Kreises − Cusanus, das Endliche als Gestalt des Unendlichen.
- Ab Stunde 10: mathematisch-geometrische Sicherung − Konstruktion des Bildpunktes, $r^2 = OM \cdot OM'$.
- Später: Paul Schatz und das Oloid, dann astrophysikalische, botanische, ethische und weltanschauliche Folgerungen.

9. Stunde − Woher kommt ein Kreis?

Epochenheft-Eintrag 9. Stunde

Einstieg: die Frage

Wir haben den Kreis am Anfang dieser Epoche einfach hingestellt und nicht gefragt, woher er kommt. Jetzt, nach diesem ganzen Weg − durch den Peripheriepunkt, durch den Nullpunkt, durch die Explosion − stellen wir die Frage:

Woher kommt ein Kreis?

Wiederholung: das Ergebnis der vorigen Stunde

Der endliche Kreis − das Endliche überhaupt − ist nicht einfach da. Er kommt aus dem Unendlichen. Der überschaubare Kreis vor uns ist die sichtbare Gestalt eines Prozesses, der durch das Unendliche hindurchgegangen ist.

Erst wenn wir den ganzen Weg gegangen sind − durch den Peripheriepunkt, durch den Nullpunkt, durch die Explosion − verstehen wir, was ein Kreis wirklich ist. Nicht eine Figur, die man hinzeichnet. Sondern ein Wesen, das aus dem Unendlichen kommt und ins Endliche tritt.

Der Schluss erzeugt den Anfang. Das Ende erklärt den Ursprung.

Die Rolle des Denkwillens

Wer hat diesen Prozess vollzogen? Nicht der Kreis allein. Nicht die Geometrie allein. Wir haben ihn vollzogen − mit unserem Denkwillen.

Wir haben den Kreis gedehnt. Wir haben ihn durch den Peripheriepunkt getragen − indem wir nicht aufgehört haben, obwohl die Kreisgesetze schwiegen. Wir haben ihn durch den Nullpunkt geführt − indem wir zurückgeschaut und den Widdersprung genommen haben. Wir waren es, die den Keim durch die beidem Abgründe getragen haben.

Aber hier taucht eine unerwartete Frage auf: Haben wir das wirklich getan − oder hat der Prozess uns getragen?

Denn beim ersten Abgrund war es das Kreisgesetz, das uns leitete. Beim zweiten Abgrund, dem Nullpunkt, war es der Rückblick auf unsere eigene Aktion, der uns trug und weiterführte. Wir haben das Ganze nicht frei erfunden − wir haben dem gefolgt, was der Kreis und seine Gesetze selbst von uns verlangten. Unser Denkwille war tätig − aber er wirkte nicht willkürlich. Er war gehorsam. Gehorsam gegenüber dem, was die Geometrie von ihm forderte. Und durch ihn wurde die Geometrie lebendig…

> **Der Denkwille, der dem Kreisgesetz gehorcht, vollzieht damit etwas, das über ihn selbst hinausgeht − und das zugleich durch ihn begründet wird. Er ist Werkzeug und Träger zugleich − Subjekt und Objekt in einem.**

Der Kreis als Wesen

Wenn der Kreis nicht eine Figur ist, die man hinzeichnet, sondern ein Wesen, das aus dem Unendlichen kommt und ins Endliche tritt − dann ist unser Denkwille den wir im Endlichen entfalten, nicht der Schöpfer des Kreises. Er ist sein Begleiter. Er vollzieht mit, was der Kreis von sich aus immer schon ist.

Und wir selber sind ein solches Wesen: aus dem Unendlichen kommend, im Endlichen lebend, im Unendlichen den eigenen Ursprung suchend. Das Suchen: das ist der Denkwille. Wonach suchen wir?

Die Topologie des Kreises

Was ist ein Kreis? Eine Linie, die ihren eigenen Ursprung sucht.

Jede Linie − wie gewunden und verschlungen sie auch sei − trägt in sich die Möglichkeit, zu sich selbst zurückzukehren: ihren Anfang mit ihrem Ende zu verbinden. In dem Moment, wo sie das tut, wird sie zum Kreis – aus seiner Verwandten, der geschlossenen Kurve. Der Ourobouros, die sich selbst verschlingende Schlange, ist das uralte Bild dafür: die Bewegung, die ihren eigenen Ursprung findet und ihn festhält. Der Kreis ist die reinste, einfachste Form dieses Zurückfindens − die Linie, die ihren Anfang sucht und ihn erreicht. Jeder Punkt auf ihm ist gleichzeitig Anfang und Ende. Er hat keinen Ursprung − und ist selbst der Ursprung.

Die kleinen Kinder

Hinweis für den Lehrer: *Der folgende Abschnitt enthält philosophische und anthropologische Aussagen, die über die Geometrie hinausgehen.*

> *Jeder Lehrer möge prüfen, ob und wie er diesen Gedankengang in seiner Klasse aufgreift − und ob er ihn aus eigener Überzeugung vertreten kann. Was nicht aus eigener Gewissheit gesprochen wird, sollte nicht gesprochen werden.*

Die kleinen Kinder, wenn sie Papier und Stift bekommen, beginnen immer mit einer kreisenden Bewegung − und auf dem Blatt erscheint die Spur ihrer Bewegung. Diese wird für sie selber sichtbar. Und dann wird der Kreis immer runder. Dann zeichnen sie ein Kreuz in den Kreis.

Sehen wir jetzt den Ursprung der Geometrie?

Was suchen wir, indem wir richtige Geometrie machen? Der Denkwille sucht seinen Ursprung. Und das ist das Denken selbst. Aus dem unendlichen Denken, das durch sich selbst besteht, kommt der Denkwille im Endlichen, der sich − das Denken selber − sucht. Und die Geometrie ist das Mittel, mit dem Denkwillen aus dem gewöhnlichen Bewusstsein heraus das unendliche Denken zu suchen und im endlichen Bewusstsein als dessen *Aufhebung* konkret zu erfahren. ‹Aufhebung im dreifachen Sinne von: auslöschen, erheben und bewahren.

Das Denken aber ist das Wesen des Menschen selbst, was ihn zum Menschen macht. Und das Denken ist zugleich das Wesen der Welt. Denn die Geometrie erst erklärt uns die Weltgesetze, die in der Welt wirken.

Wir kommen darauf zurück.

Das Geschenk der Geometrie

Das Unendliche − der Peripheriepunkt − enthält den Kreis als Keim. Der Nullpunkt ist der Moment, wo dieser Keim explodiert und ins Endliche tritt. Und wir − mit unserem Denkwillen − sind dabei. Wir sind Zeugen und Mitträger dieses Übergangs.

Das schenkt uns die Geometrie, wenn wir objektiv-gesetzmäßig geometrisieren.

Das ist nicht mehr Geometrie allein. Das ist Erkenntnis des Erkennens selbst.

Angelus Silesius − Fazit

Am Ende dieses Weges treffen wir auf einen Dichter und Mystiker des 17. Jahrhunderts, der denselben Weg gegangen ist − nicht mit Zirkel und Lineal, sondern mit dem Wort:

> ***«Ich bin nicht, was ich weiß, ich weiß nicht was ich bin, ein Ding und nicht ein Ding, ein Tüpfchen und ein Kreis.»*** − Angelus Silesius, Der Cherubinische Wandersmann (1675)

Das Ich ist nicht der Nullpunkt allein − und nicht der Kreis allein. Es ist beides zugleich: das Tüpfchen, das keine Ausdehnung hat, und der Kreis, der alles umschließt. Es ist der Übergang selbst − der Prozess, den wir vollzogen haben.

Coincidentia Oppositorum − nicht im Unendlichen draußen, sondern im Ich.

Lehrernotiz zur 9. Stunde

Methodisch-didaktische Hinweise

Lehrernotiz

Die 9. Stunde ist der philosophische Abschluss der Einleitung. Sie bereitet den Boden für die mathematisch-geometrische Sicherung, die ab Stunde 10 folgt. Gleichzeitig öffnet sie den Blick auf die weltanschaulichen, botanischen und astrophysikalischen Folgerungen, die am Ende der Epoche stehen werden.

Zum Einstieg:

- Die Frage − Woher kommt ein Kreis? − wird ohne Kommentar gestellt. Die Schüler antworten zuerst. Was auch immer kommt, wird gehört − ohne Korrektur. Erst dann folgt die Wiederholung des Ergebnisses aus Stunde 8.
- Die Schülerantworten werden an der Tafel gesammelt. Am Ende der Stunde kann der Lehrer sie mit dem Ergebnis vergleichen − ohne die Schülerantworten zu entwerten.

Zur Rolle des Denkwillens:

- Die Unterscheidung zwischen dem aktiven Denkwillen und dem Kreisgesetz, dem er gehorcht, ist der philosophische Kern. Der Lehrer kann fragen: Habt ihr den Kreis gemacht − oder hat der Kreis euch gemacht?
- Diese Frage führt zur erkenntnistheoretischen Dimension: der Denkwille ist Subjekt, das über das Gegebene (die banale Kreisvorstellung) hinaus will. S erzeugt das Objekt, die Kreismetamorphose. Diese wiederum wird Vorstellungsinhalt und erzeugt das Bewusstsein des Denkwillens, also diesen selbst. So ist das Subjekt zugeich das Objekt. Das ist kein Widerspruch − es ist die Coincidentia Oppositorum im Erkenntnisakt selbst.

Zur Topologie des Kreises:

- Der Ouroboros kann als Bild an die Tafel gezeichnet werden − die sich selbst verschlingende Schlange. Er ist in vielen Kulturen bekannt; die Schüler werden ihn kennen.
- Die Formulierung ‹Eine Linie, die ihren eigenen Ursprung sucht› ist ein starker Merksatz. Er kann an die Tafel geschrieben werden.

Zum Abschnitt ‹Die kleinen Kinder›:

- Dieser Abschnitt steht im Epochenhefttext mit einem Warnhinweis. Der Lehrer prüft selbst, ob er ihn aufgreift.
- Wenn er aufgegriffen wird: die Beobachtung über Kinderzeichnungen ist empirisch gut belegt. Kinder beginnen tatsächlich mit kreisenden Bewegungen und zeichnen früh Kreise mit Kreuz − was in der Waldorfpädagogik als Archetyp der Raumorientierung gilt.
- Der Gedanke − Geometrie als Mittel, mit dem Denkwillen das unendliche Denken zu suchen − ist anthroposophisch fundiert. Lehrer, die diesen Hintergrund kennen und vertreten können, werden ihn aufgreifen. Anderen sei empfohlen, bei der rein geometrischen Beobachtung zu bleiben und den Abschnitt zu kürzen.

Zu Angelus Silesius:

- Johann Scheffler (1624–1677), genannt Angelus Silesius, war Arzt, Dichter und Mystiker. Sein Hauptwerk Der Cherubinische Wandersmann (1675) enthält Epigramme, die Meister Eckharts Mystik in knappe Verse fassen.
- Das Zitat kann von den Schülern auswendig gelernt werden − es ist kurz und einprägsam. Es kann am Ende der Epoche als Motto wiederkehren.
- Der Lehrer lässt das Zitat wirken − ohne sofortige Erklärung. Erst nach einer Pause: Was meint er mit Tüpfchen? Was meint er mit Kreis?

Zum Stundenplan:

- Ab Stunde 10: mathematisch-geometrische Sicherung − Konstruktion des Bildpunktes, das Gesetz $r^2 = OM \cdot OM'$, Zirkel und Lineal.
- Später: Paul Schatz und das Oloid. Zum Beschluss: astrophysikalische, botanische, ethische und weltanschauliche Folgerungen. Der Satz ‹Wir kommen darauf zurück› im Epochenhefteintrag verweist bewusst darauf.

10. Stunde − Konstruktion und Verhalten der Figuren

Epochenheft-Eintrag 10/11 Stunde

Die Definition der Kreisumstülpung

Wir haben den Kreisumstülpungsprozess neun Stunden lang erlebt und durchdacht. Jetzt fassen wir ihn mathematisch präzise:

> **Gegeben: ein Kreis Ø mit Mittelpunkt O und Radius r − der Inversionskreis. Jedem Punkt P der Ebene (außer O) wird ein Bildpunkt P' zugeordnet, so dass: 1. P und P' auf demselben Strahl von O liegen. 2. $OP \cdot OP' = r^2$**

Das Gesetz $OP \cdot OP' = r^2$ bestimmt die Lage von P' vollständig. Es gilt:

Liegt P auf dem Inversionskreis: $OP = r \rightarrow OP' = r$. P bleibt auf dem Kreis.

Liegt P innen: $OP < r \rightarrow OP' > r$. P' liegt außen.

Liegt P außen: $OP > r \rightarrow OP' < r$. P' liegt innen.

$P \rightarrow O$ (Pol): $OP' \rightarrow \infty$. Der Pol hat keinen Bildpunkt.

$P \rightarrow \infty$ (Peripheriepunkt): $OP' \rightarrow 0$. Der Peripheriepunkt wird zum Pol.

Konstruktion des Bildpunktes P' − P liegt außerhalb von Ø

[Zeichnung: Inversion_am_Kreis_interaktiv.html − P außerhalb]

Schritt 1: Verbinde O mit P − zeichne den Strahl OP.

Schritt 2: Halbiere die Strecke OP − bestimme die Mitte M.

Schritt 3: Zeichne den Thaleskreis: Kreis mit Mittelpunkt M und Radius MO = MP.

Schritt 4: Bestimme die Schnittpunkte N und N' des Thaleskreises mit dem Inversionskreis Ø.

Schritt 5: Fälle das Lot von N auf den Strahl OP. Der Fußpunkt ist P'.

Beweis: *Im Thaleskreis gilt $\angle ONP = 90°$ (Thaleswinkel). Also steht ON senkrecht auf NP'. Da $ON = r$, folgt aus der Ähnlichkeit der rechtwinkligen Dreiecke ONP und OP'N: $OP : ON = ON : OP' \rightarrow OP \cdot OP' = ON^2 = r^2$ ✓*

Konstruktion des Bildpunktes P' − P liegt innerhalb von Ø

[Zeichnung: Inversion_am_Kreis_interaktiv.html − P innerhalb]

Schritt 1: Verbinde O mit P − zeichne den Strahl OP und verlängere ihn über den Inversionskreis hinaus.

Schritt 2: Errichte im Punkt P eine Senkrechte auf den Strahl OP.

Schritt 3: Diese Senkrechte schneidet den Inversionskreis in einem Punkt N.

Schritt 4: Lege die Tangente an den Inversionskreis im Punkt N. Sie schneidet den Strahl OP in P'.

> ***Beweis:*** *Das rechtwinklige Dreieck ONP' hat den rechten Winkel bei N (ON Radius, NP' Tangente → ON ⊥ NP'). Die Höhe vom rechten Winkel auf die Hypotenuse OP' ergibt:* $OP \cdot OP' = ON^2 = r^2$ ✓

Die Konstruktion ist der Beweis − Zirkel und Lineal haben ihn bereits geführt.

---

11. Stunde − Verhalten der Figuren unter der Kreisumstülpung

Was geschieht mit Geraden und Kreisen?

Ein einzelner Punkt findet seinen Bildpunkt nach dem Gesetz $OP \cdot OP' = r^2$. Was aber geschieht mit ganzen Figuren − mit Geraden und Kreisen − wenn wir jeden ihrer Punkte umstülpen?

Es gibt vier Grundfälle.

Fall 1: Gerade durch O → Gerade durch O

Eine Gerade durch den Pol O wird auf sich selbst abgebildet. Jeder Punkt P auf ihr findet seinen Bildpunkt P' ebenfalls auf ihr − näher oder weiter von O, aber stets auf derselben Geraden. Die Gerade ist invariant unter der Umstülpung.

[Zeichnung: Gerade durch O → Gerade durch O]

Fall 2: Gerade nicht durch O → Kreis durch O

Eine Gerade, die O nicht enthält, wird auf einen Kreis abgebildet, der durch O geht. Je näher die Gerade an O heranrückt, desto größer wird der Bildkreis. Je weiter sie entfernt ist, desto kleiner.

Verbindung zur Körperübung: Das ist genau der Übergang, den wir erlebt haben − die Basis-Gerade wurde zum Kreis hinter uns.

[Zeichnung: Gerade nicht durch O → Kreis durch O]

Fall 3: Kreis durch O → Gerade nicht durch O

Umkehrung von Fall 2. Ein Kreis, der durch O geht, wird auf eine Gerade abgebildet, die O nicht enthält. Der Pol O selbst hat keinen Bildpunkt − er wird zum Peripheriepunkt, die Kreislinie öffnet sich zur Geraden.

[Zeichnung: Kreis durch O → Gerade nicht durch O]

Fall 4: Kreis nicht durch O → Kreis nicht durch O

Ein Kreis, der O nicht enthält, wird auf einen anderen Kreis abgebildet. Mittelpunkt und Radius verändern sich − aber die Kreisform bleibt erhalten. Das ist das überraschendste Ergebnis: die Kreisumstülpung verwandelt Kreise in Kreise.

[Zeichnung: Kreis nicht durch O → Kreis nicht durch O]

Übersicht: die vier Grundfälle

Urbild	Bildpunkt
Gerade durch O	Gerade durch O
Gerade nicht durch O	Kreis durch O
Kreis durch O	Gerade nicht durch O
Kreis nicht durch O	Kreis nicht durch O

> **Geraden und Kreise werden unter der Kreisumstülpung in Geraden oder Kreise verwandelt − nie in andere Kurven. Die Kreisumstülpung ist eine Abbildung, die die Familie der Geraden und Kreise in sich selbst überführt.**

Ausblick: die Winkelerhaltung

Die Kreisumstülpung hat noch eine weitere, besonders schöne Eigenschaft: sie ist eine konforme Abbildung − sie erhält Winkel. Wo immer zwei Kurven sich schneiden, bleibt der Schnittwinkel nach der Umstülpung derselbe. Diese Eigenschaft verdient eine eigene Betrachtung.

Lehrernotiz zu Stunde 10 und 11

Methodisch-didaktische Hinweise

Lehrernotiz

Die Stunden 10 und 11 bilden den mathematischen Kern der Epoche. Die Schüler haben neun Stunden Erfahrung − jetzt soll das Erlebte konstruierbar und beweisbar werden. Der Lehrer achtet darauf, dass die Verbindung zur Körperübung nicht verloren geht.

Zur Definition (Stunde 10):

- Die Definition $OP \cdot OP' = r^2$ wird nicht einfach hingestellt − sie wird aus der Körpererfahrung hergeleitet. Der Lehrer fragt: Wir haben gespürt, dass P' weiter von O liegt, wenn P näher ist. Wie könnten wir das mathematisch ausdrücken?
- Die fünf Konsequenzen (P auf dem Kreis, P innen, P außen, $P \to O$, $P \to \infty$) werden von den Schülern selbst erarbeitet − nicht vom Lehrer aufgezählt.
- Die interaktive HTML-Datei (Inversion_am_Kreis_interaktiv.html) wird am Beamer gezeigt. Die Schüler sehen, wie P' sich bewegt, wenn P verschoben wird. Die Wertetabelle zeigt in Echtzeit, dass $OP \cdot OP' = r^2$ immer gilt.

Zur Konstruktion:

- Die Schüler konstruieren selbst − mit Zirkel und Lineal, auf Papier. Nicht nur zuschauen. Mindestens drei verschiedene Positionen von P (innen, außen, auf dem Kreis).
- Der Beweis steckt in der Konstruktion selbst. Der Lehrer muss ihn nicht separat präsentieren − er kann ihn aus der fertigen Zeichnung herauslesen lassen.
- Für den Fall P innen: die Tangentenkonstruktion ist anspruchsvoller. Alternativ: Lot von P auf ON, dann Schnittpunkt mit der Geraden OP verlängert.

Zu den vier Grundfällen (Stunde 11):

- Jeder Fall wird konstruiert, nicht nur beschrieben. Die Schüler nehmen mehrere Punkte auf der Geraden bzw. dem Kreis, bestimmen ihre Bildpunkte und zeichnen die Bildfigur.
- Der Überraschungsmoment ist Fall 4: dass ein Kreis wieder auf einen Kreis abgebildet wird, ist nicht selbstverständlich. Der Lehrer lässt die Schüler zunächst raten − was wird aus einem Kreis?
- Die Verbindung zur Körperübung bei Fall 2 und 3 ist wichtig: das ist, was wir in Stunde 3 erlebt haben. Die Schüler erkennen ihre eigene Erfahrung in der Konstruktion wieder.
- Die Tabelle am Ende der Stunde kann von den Schülern selbst ausgefüllt werden − sie entsteht aus den Konstruktionen, nicht als Vorgabe.

Zur Winkelerhaltung:

- Die Konformität der Kreisumstülpung wird in Stunde 12 behandelt. Hier nur als Ausblick. Der Lehrer kann eine einfache Frage stellen: Wenn zwei Kreise sich unter einem bestimmten Winkel schneiden − was passiert mit diesem Winkel nach der Umstülpung?
- Die Animation (Inversion_Version3_Animation.html) kann am Ende von Stunde 11 gezeigt werden − als Zusammenfassung des gesamten Prozesses.

12. Stunde − Konformität: die Kreisumstülpung erhält Winkel

Epochenheft-Eintrag 12. Stunde

Einstieg: Was bleibt erhalten?

Wir haben gesehen: Geraden werden zu Kreisen, Kreise zu Geraden oder anderen Kreisen. Formen verändern sich grundlegend unter der Kreisumstülpung. Aber bleibt überhaupt irgendetwas erhalten?

Die Antwort ist: ja. Die Winkel.

Wo immer zwei Kurven sich schneiden, bleibt der Schnittwinkel nach der Umstülpung derselbe. Die Kreisumstülpung ist eine konforme Abbildung − winkeltreu.

> **Die Kreisumstülpung ist konform: sie erhält alle Schnittwinkel zwischen Kurven.**

Anschauliche Skizze des Beweises

Wie kann man das einsehen? An einem Schnittpunkt zweier Kurven legt man die Tangenten. Der Winkel zwischen den Kurven ist der Winkel zwischen ihren Tangenten in diesem Punkt.

Unter der Kreisumstülpung werden die Kurven auf neue Kurven abgebildet. Aber in der unmittelbaren Umgebung des Schnittpunktes verhält sich die Umstülpung wie eine Ähnlichkeitsabbildung: sie streckt und staucht gleichmäßig in alle Richtungen − aber sie dreht nicht. Deshalb bleibt der Winkel zwischen den Tangenten erhalten.

Anders gesagt: die Kreisumstülpung ist lokal ähnlich − in kleinsten Maßstäben wirkt sie wie eine Streckung, nie wie eine Drehung oder Scherung. Das ist die Konformität.

[Zeichnung: Zwei sich schneidende Kreise vor und nach der Umstülpung − Winkel bleibt erhalten]

Apollonius-Kreise − das schönste Beispiel

Beschreibung

Gegeben seien zwei feste Punkte A und B. Die Apollonius-Kreise bilden zwei orthogonale Kreisscharen:

Erste Schar: alle Kreise, die durch A und B gehen. Sie füllen die ganze Ebene aus und schneiden sich alle in A und B.

Zweite Schar: alle Kreise, für die A und B zueinander inverse Punkte sind. Sie umschlingen entweder A oder B, aber nie beide.

Diese beiden Scharen schneiden sich stets unter 90° − überall, an jedem Schnittpunkt. Sie sind orthogonal zueinander.

[Zeichnung: Apollonius-Kreise − zwei orthogonale Kreisscharen]

Unter der Kreisumstülpung mit Pol in A geschieht Folgendes:

Die Kreise der ersten Schar (sie gehen alle durch A = Pol) werden zu Geraden.

Die Kreise der zweiten Schar werden zu konzentrischen Kreisen um den Bildpunkt von B.

Die rechten Winkel bleiben erhalten − aus orthogonalen Kreisscharen werden orthogonale Geraden- und Kreisscharen. Das Bild ist ebenso schön wie das Original.

[Zeichnung: Apollonius-Kreise nach der Umstülpung − Geraden und konzentrische Kreise]

Konstruktive Aufgabe

Aufgabe: Gegeben: Inversionskreis Ø mit Mittelpunkt O und Radius r. Zwei Punkte A und B auf dem Durchmesser, die zueinander invers sind ($OA \cdot OB = r^2$). Konstruiere mehrere Kreise beider Apollonius-Scharen und bestimme ihre Bildpunkte unter der Kreisumstülpung mit Pol A. Zeige, dass die rechten Winkel erhalten bleiben.

Vorgehensweise:

Schritt 1: Wähle drei bis vier Punkte P auf einem Kreis der ersten Schar (durch A und B). Bestimme ihre Bildpunkte P'. Zeichne die Bildfigur − sie sollte eine Gerade ergeben.

Schritt 2: Wähle einen Kreis der zweiten Schar (A und B sind inverse Punkte). Bestimme mehrere Bildpunkte. Die Bildfigur sollte ein konzentrischer Kreis sein.

Schritt 3: Miss den Schnittwinkel der beiden Urbilder an einem Schnittpunkt. Miss denselben Winkel am Bild. Vergleiche.

Schritt 4: Wiederhole mit anderen Kreisen. Das Ergebnis ist stets: der Winkel bleibt 90°.

[Konstruktionszeichnung: Apollonius-Kreise und ihre Bildpunkte]

Ausblick: das Poincaré-Modell

Ausblick: *Die Konformität der Kreisumstülpung ist der Schlüssel zu einem der faszinierendsten Modelle der modernen Mathematik: dem Poincaré-Modell der hyperbolischen Geometrie. In ihm erscheinen die „Geraden“ als Kreisbögen innerhalb eines festen Kreises − und die Winkel zwischen ihnen sind die gewöhnlichen euklidischen Winkel. Die Kreisumstülpung zeigt, warum das möglich ist: weil sie Winkel erhält, auch wenn sie Formen* *grundlegend verändert. Diese Welt werden wir in einer späteren Epoche betreten.*

Lehrernotiz zur 12. Stunde

Methodisch-didaktische Hinweise

Lehrernotiz

Die 12. Stunde bringt das schönste Ergebnis der Kreisumstülpung: die Winkelerhaltung. Sie ist mathematisch tief, aber anschaulich gut zugänglich. Die Apollonius-Kreise sind das ideale Beispiel − sie verbinden Konformität, Kreisumstülpung und projektive Geometrie in einem einzigen Bild.

Zum Einstieg:

- Die Frage 'Was bleibt erhalten?' kann als Unterrichtsgespräch beginnen. Die Schüler haben erlebt, dass Formen sich verändern. Die Idee, dass Winkel erhalten bleiben könnten, ist überraschend − und überzeugend, wenn man die Konformität erst einmal gesehen hat.
- Ein einfaches Beispiel vorab: zwei Kreise, die sich unter 90° schneiden. Nach der Umstülpung − was passiert? Der Lehrer lässt die Schüler raten, dann konstruieren.

Zur anschaulichen Beweisskizze:

- Den formalen Beweis weglassen − er ist für die Oberstufe zu technisch. Die anschauliche Begründung (lokale Ähnlichkeit, keine Drehung) genügt für das Epochenheft.
- Wer den formalen Beweis kennt und zeigen möchte: er läuft über die Ähnlichkeit der Dreiecke OP'Q' und OQP (für zwei benachbarte Punkte P und Q auf einer Kurve). Das ist machbar, aber zeitaufwändig.

Zu den Apollonius-Kreisen:

- Die beschreibende Version genügt für das Epochenheft. Die konstruktive Aufgabe ist für begabte Schüler oder als Hausaufgabe geeignet.
- Die Zeichnung der Apollonius-Kreise ist ästhetisch eindrucksvoll − sie kann als Wandbild oder Tafelbild die ganze Stunde begleiten.
- Historischer Hintergrund: Apollonius von Perga (ca. 262–190 v. Chr.) war einer der bedeutendsten griechischen Mathematiker. Sein Hauptwerk 'Kegelschnitte' ist bis heute grundlegend. Das Apollonius-Problem − einen Kreis zu konstruieren, der drei gegebene Kreise berührt − ist eine der klassischen Konstruktionsaufgaben der Geometrie.

Zum Poincaré-Modell:

- Nur als Ausblick − nicht ausführen. Der Verweis genügt. Wer neugierige Schüler hat, kann die Frage stellen: Wenn Geraden als Kreisbögen erscheinen können − was bedeutet das für die Parallelität? Das öffnet die Tür zur hyperbolischen Geometrie.
- Henri Poincaré (1854–1912), französischer Mathematiker und Physiker, entwickelte dieses Modell Ende des 19. Jahrhunderts. Es zeigt, dass die euklidischen Parallelenaxiom nicht notwendig ist − es gibt konsistente Geometrien ohne es.

Zum Stundenplan:

- Mit Stunde 12 ist der geometrisch-mathematische Kern der Epoche abgeschlossen. Es folgen: Paul Schatz und das Oloid, sowie die weltanschaulichen, botanischen und astrophysikalischen Folgerungen.

13. Stunde − Übergang in die Dreidimensionalität: die Ellipse

---

Epochenheft-Eintrag

Von der Fläche in den Raum

Zwölf Stunden haben wir in der Ebene gearbeitet. Der Kreis, seine Umstülpung, der Peripheriepunkt, der Nullpunkt, die Farben, die Konformität − alles war zweidimensional. Jetzt bereiten wir den Schritt in den Raum vor.

Wir beginnen mit einem Gedankenexperiment an der Tafel. Das Werkzeug: die Ellipse.

Die Ellipse − eine neue Qualität

Die Ellipse unterscheidet sich vom Kreis durch eine wesentliche neue Eigenschaft: sie hat zwei Brennpunkte F_1 und F_2 und dehnt sich entlang einer Hauptachse aus. Die Brennpunkt-Definition lautet:

> **PF1 + PF2 = 2a = konstant für alle Punkte P auf der Ellipse (a = große Halbachse)**

Kreisinnenfläche der Ellipse: gelb

Kreisaußenfläche der Ellipse: blau

[Zeichnung: Ellipse mit Brennpunkten F1 und F2, Hauptachse 2a, Nebenachse 2b − innen gelb, außen blau]

Das Gedankenexperiment: die Ellipse schrumpft

Wir drücken die Ellipse gedanklich entlang ihrer Hauptachse zusammen − von links und rechts, mit zwei gegenläufigen Vektoren. Dabei halten wir die Form als Ellipse fest: die Brennpunkt-Bedingung gilt weiterhin.

Phase 1: ***Die Ellipse wird runder***

Die Brennpunkte F1 und F2 wandern von links und rechts aufeinander zu. Die Summe PF1 + PF2 = 2a bleibt konstant. Die Exzentrizität e = c/a (mit c = Abstand F1F2) nimmt ab. Die Ellipse wird runder − je näher sich die Brennpunkte kommen, desto mehr nähert sich die Ellipse dem Kreis an.

[Zeichnung: Ellipse Phase 1 − Brennpunkte wandern aufeinander zu, Ellipse wird runder]

Phase 2: ***Der Nullpunkt − die Singularität***

Im mathematischen Nullpunkt fallen Mittelpunkt und beide Brennpunkte zusammen: F_1 = F_2 = M. Die große Halbachse a = 0. Die Ellipse ist zum

Punkt entartet. Das Gelbe verschwindet im Punkt − das Blau füllt die gesamte Ebene. Wir kennen diesen Moment: er ist der zweite Abgrund.

[Zeichnung: Ellipse Phase 2 − Nullpunkt, F□ = F□ = M, Ebene blau]

Phase 3: ***Das Ausstülpen − die Richtungswende***

Wir halten den Denkwillen nicht an. Die beiden Vektoren treffen im Nullpunkt aufeinander − sie können sich nicht durchdringen. Sie weichen orthogonal aus: der linke Brennpunkt F□ schießt nach oben, der rechte Brennpunkt F□ schießt nach unten. Die neue Ellipse wächst senkrecht zur ursprünglichen Hauptachse − aufrecht, mit vertauschten Farben.

[Zeichnung: Ellipse Phase 3 − neue Ellipse senkrecht, Brennpunkte oben und unten, innen blau, außen gelb]

Der Beweis: warum stehen die Ellipsen senkrecht aufeinander?

Wir beweisen die orthogonale Richtungswende mit zwei sich ergänzenden Methoden:

Methode 1 − Vektorargument (begründet die Richtung):

Wir drücken nur entlang der Hauptachse − zwei gegenläufige Vektoren von links und rechts. Im Nullpunkt treffen sie aufeinander. Die Horizontalrichtung ist blockiert − die Vektoren können nicht weiter in derselben Richtung wirken. Die einzige freie Richtung ist die Vertikale − die ehemalige Nebenachse. Die Brennpunkte weichen orthogonal aus und schießen nach oben und unten.

Methode 2 − Brennpunkt-Definition (beweist die Konsequenz):

Die neue Ellipse gehorcht derselben Brennpunkt-Definition: $PF_1' + PF_2' = 2a'$. Ihre Brennpunkte liegen jetzt auf der vertikalen Achse. Die neue große Halbachse a' ist vertikal − die neue kleine Halbachse b' ist horizontal. Durch die Erhaltung der Ellipsenform gilt: die alte kleine Halbachse b wird zur neuen großen Halbachse a'. Also: b_alt = a_neu. Die Achsen sind vertauscht.

> **Die Vektormethode zeigt, warum die Brennpunkte orthogonal ausweichen. Die Brennpunkt-Definition zeigt, was daraus folgt: b_alt = a_neu. Die kürzeste Ausdehnung wird zur längsten − Coincidentia Oppositorum in der Ellipse.**

Farbwechsel und Krümmungsumkehr

Die neue, aufgerichtete Ellipse zeigt zwei Veränderungen zugleich:

Neue Ellipse innen: blau (ehemals außen)

Neue Ellipse außen: gelb (ehemals innen)

Und: was vorher die konvexe Außenseite war, ist jetzt die konkave Innenseite. Die Krümmung hat sich umgekehrt − dasselbe Phänomen, das wir beim Kreis erlebt haben, erscheint jetzt in der Ellipse.

Die überführende Frage: zum Oloid

Wir haben einen zeitlichen Prozess betrachtet: eine liegende Ellipse geht durch den Nullpunkt und wird zu einer aufrechten Ellipse. Vorher und Nachher sind durch den Nullpunkt getrennt.

Jetzt stellen wir die entscheidende Frage:

Was geschieht, wenn wir Vorher und Nachher nicht als zeitliche Abfolge denken, sondern gleichzeitig − als statische Form im Raum?

Zwei Ellipsen, senkrecht zueinander, mit vertauschten Achsen, ineinander gefügt − das ist die Grundform des Oloids. Paul Schatz hat den zeitlichen Umstülpungsprozess in eine statische räumliche Form übersetzt. Das Oloid ist der eingefrorene Moment des Durchgangs − Ausgangs- und Endfigur gleichzeitig, im Raum vereint.

Und seine Rollbewegung − das taumelnde Wälzen, bei dem jeder Punkt der Oberfläche die Ebene berührt − ist die Erinnerung an den Prozess, aus dem es entstanden ist.

Lehrernotiz zur 13. Stunde

Methodisch-didaktische Hinweise

Lehrernotiz

Die 13. Stunde ist der Übergang von der zweidimensionalen Kreisumstülpung zur dreidimensionalen Form des Oloids. Sie besteht ausschließlich aus einem Gedankenexperiment an der Tafel − kein Basteln, keine Modelle. Die Haptik kommt in Stunde 17/18 beim Bau des Oloids.

Zur Ellipse als neuem Objekt:

- Die Ellipse ist den Schülern aus dem Mathematikunterricht bekannt. Hier wird sie neu betrachtet: nicht als algebraische Kurve, sondern als lebendige Form mit zwei Polen (Brennpunkten), die eine innere Spannung verkörpert.
- Die Brennpunkt-Definition $PF_1 + PF_2 = 2a$ wird an die Tafel geschrieben und mit einer Zeichnung illustriert. Die Schüler sollen sie nicht nur kennen, sondern verstehen: jeder Punkt auf der Ellipse hält denselben Gesamtabstand zu beiden Brennpunkten.
- Die Farbgebung (innen gelb, außen blau) schließt direkt an die vorigen Stunden an. Kein neuer Erklärungsbedarf.

Zum Gedankenexperiment:

- Die drei Phasen werden nacheinander an die Tafel gezeichnet − nicht gleichzeitig. Jede Phase wird erst beschrieben, dann gezeichnet, dann kommentiert.
- Phase 1 und 2 kennen die Schüler aus der Kreisumstülpung. Der Lehrer kann fragen: Wo haben wir das schon gesehen? Die Verbindung zu Stunde 3 und 4 ist offensichtlich.
- Phase 3 ist das Neue. Der Lehrer lässt die Schüler zunächst raten: Wenn die Vektoren weiterwirken − wohin gehen die Brennpunkte? Erst nach dem Gespräch die Zeichnung.

Zum Beweis:

- Die zwei Methoden (Vektor und Brennpunkt) sind bewusst getrennt. Der Lehrer macht explizit: Methode 1 zeigt das Warum, Methode 2 zeigt das Was. Keine der beiden reicht allein.

- Das Ergebnis b_alt = a_neu ist für die Schüler überraschend − die kleinste Ausdehnung wird zur größten. Der Lehrer lässt es wirken: wieder Coincidentia Oppositorum.

Zur Schlussfrage:

- Die Frage − Was geschieht, wenn wir Vorher und Nachher gleichzeitig im Raum denken? − wird nicht beantwortet. Sie ist der Einstieg in die nächste Stunde: Paul Schatz und das Oloid.
- Der letzte Satz (die Rollbewegung als Erinnerung an den Prozess) kann an die Tafel geschrieben werden − als Vorgeschmack auf das, was kommt.

Zum Stundenplan:

- Stunde 14: Paul Schatz − Leben, Werk, Weltbild; die Umstülpung des Würfels
- Stunde 15/16: Demonstration der Würfelumstülpung; Übergang zum Oloid
- Stunde 17/18: Bau des Oloids aus farbigen Ellipsen − Konstruktionsanleitung und haptische Prüfung
- Stunde 19/20: Weltanschauliche, botanische und astrophysikalische Folgerungen − Epochenabschluss

14. Stunde − Paul Schatz

Epochenheft-Eintrag 14. Stunde

Herkunft und Jugend − Konstanz am Bodensee, 1898

Paul Schatz wurde am 22. Dezember 1898 als Sohn einer gutbürgerlichen Familie in Konstanz am Bodensee geboren. Sein Vater war Stadtrat und Besitzer einer kleinen Maschinenfabrik. Als Jugendlicher faszinierten ihn die technischen Entwicklungen des neuen Jahrhunderts, insbesondere die Luftfahrt. 1916 erhielt der hochbegabte Schüler den Graf Zeppelin-Preis für die besten Leistungen in den mathematischen und naturwissenschaftlichen Fächern.

Alles deutete auf eine klassische Ingenieurslaufbahn hin.

Der Erste Weltkrieg und die Wende

Schatz war Kriegsfreiwilliger und wurde 1917 als Funker eingezogen. Der Krieg veränderte ihn. Was ihn danach in den Studienjähren antrieb, war nicht Unwissenheit, sondern Skepsis: Er studierte Mathematik, Maschinenbau, Philosophie und Astronomie in München und Hannover − und schloss sein Studium nicht ab. Die positivistische Wissenschaft, die nur misst und berechnet, aber nicht fragt woher und wozu, genügte ihm nicht.

Er wandte sich der Kunst zu − Ausbildung als Holzschnitzer, Arbeiten als Bildhauer. Und dann, 1922, hörte er in München einen Vortrag von Rudolf Steiner, dem Begründer der Anthroposophie. Die Anthroposophie wurde fortan zur Inspiration seiner Arbeiten und Forschungen.

Die Entdeckung − 1929

Ab 1927 lebte Schatz in Dornach bei Basel als Künstler, Techniker und vielseitiger Erfinder. Geleitet von der Idee, dass jeder starre Körper in sich die Gesetze der Bewegung und die Möglichkeit der Umstülpung hat, begann er die platonischen Körper zu untersuchen.

Die Umstülpungsbewegung der platonischen Körper entdeckte Schatz 1929 zunächst am Pentagondodekaeder. Dann kam der Würfel − und die größte Entdeckung seines Lebens:

> **Indem der Würfel regelrecht von innen nach außen gestülpt werden konnte, ergab sich ein plastischer Körper, der vollständig auf der Fläche zum Abrollen gebracht werden kann.**

Die vollständige Umstülpbarkeit des Würbels ist bis heute eine revolutionäre Arbeit, die in der gängigen Lehre vergleichsweise wenig bekannt ist.

Die Umstülpung des Würfels − und was sie mit unserem Kreis zu tun hat

Hier ist ein wichtiger Unterschied zu betonen: Die Kreisumstülpung, die wir in dieser Epoche studiert haben, ist eine mathematische Abbildung in der Ebene − jeder Punkt P wird nach dem Gesetz $OP \cdot OP' = r^2$ auf einen Bildpunkt P' abgebildet. Es ist eine geometrische Transformation, keine physische Bewegung.

Die Würfelumstülpung von Paul Schatz hingegen ist eine kinematische Bewegung im Raum: Ein dreidimensionaler Körper − der Würfelgürtel aus sechs gelenkig verbundenen Tetraedern − dreht sich durch sich selbst hindurch, von innen nach außen.

Was beide verbindet, ist das gemeinsame Prinzip: Innen wird Außen, Außen wird Innen − durch einen Nullpunkt hindurch, an dem die Form entartet. Schatz hat dasselbe Prinzip entdeckt, das wir am Kreis erlebt haben − aber er hat es am Würfel entdeckt, und er hat es nicht als geometrische Abbildung gedacht, sondern als lebendige Bewegung im Raum.

[Schema: Umstülpung des Würfels in drei Phasen (Wuerfel_Umstuelpung_Schema.svg)]

Das Oloid − Kind zweier Wege

Aus der Beobachtung des Weges der Raumdiagonalen beim Umstülpen der tetraedrischen Würfelelemente entdeckte Schatz die geometrische Form des Oloids. Es entsteht als die konvexe Hülle zweier gleich großer Kreisscheiben, die senkrecht zueinander stehen und sich gegenseitig durch den Mittelpunkt durchdringen.

Das ist genau das, was wir in der vorigen Stunde als Gedankenexperiment erarbeitet haben: die liegende und die aufgerichtete Ellipse, ineinandergefügt. Das Oloid ist der eingefrorene Moment des Durchgangs − Ausgangs- und Endfigur gleichzeitig, im Raum vereint.

1970 erhielt Paul Schatz das Schweizer Patent Nr. 500.000 für das Oloid − eine bemerkenswerte Zahl: das 500.000ste Schweizer Patent.

Das Lebenswerk und Weltbild

Die Welt ist umstülpbar. Die Welt ist rhythmisch. Das war sein Credo. Ihm gelang es, eine Technik zu schaffen, die im Einklang mit den Gesetzen und Rhythmen der Natur steht.

Aus dem umstülpbaren Würfel entwickelte Schatz den Turbula-Mischer − ein Schüttelgerät, das in der chemischen und pharmazeutischen Industrie eingesetzt wird. Das Oloid wird zur Wasserreinigung und -aufbereitung verwendet. Über 1.000 Oloide sind heute weltweit im Einsatz. Schatz hatte die Vision, dass Oloide auch Schiffe antreiben könnten, die nicht nur Menschen und Waren befördern, sondern die Ufer der Seen, Flüsse und Kanäle schonen und auf die Lebensprozesse im Wasser förderlich einwirken.

> *„Da ich den Würfel aus sich selbst befreite Und ihn dem Weltensphärenraum verband, Bewog ich ihn, in sich zurückzukehren.“* − Paul Schatz, aus: Rhythmusforschung und Technik

Lebensdaten

1898 Geboren am 22. Dezember in Konstanz am Bodensee

1916 Graf Zeppelin-Preis für Mathematik und Naturwissenschaften

1917 Kriegsfreiwilliger, als Funker eingezogen

1922 Hört Rudolf Steiner in München − Hinwendung zur Anthroposophie

1927 Zieht nach Dornach, lebt als Künstler und Erfinder

1929 Entdeckung der Umstülpung der platonischen Körper und des Würbels

1970 Schweizer Patent Nr. 500.000 für das Oloid

1975 Gründung der OLOID AG; Hauptwerk „Rhythmusforschung und Technik" erscheint

1979 Gestorben am 7. März in Arlesheim, Schweiz

Literatur

P. Schatz: Die Welt ist umstülpbar − Rhythmusforschung und Technik, Zürich 2008

B. Kolass (Hrsg.): Paul Schatz. Leben und Werk des Erfinders der Umstülpung, Berlin 2014

R. Neumann (Hrsg.): Bau eines umstülpbaren Würbels, Pädagogische Forschungsstelle Kassel 2012

www.paul-schatz.ch

Lehrernotiz zur 14. Stunde

Hinweise zur Erzählstunde

Lehrernotiz

Die 14. Stunde ist eine Erzählstunde − keine Konstruktion, kein Experiment. Der Lehrer erzählt die Biographie von Paul Schatz als geistige Entwicklung: nicht als trockene Faktenreihe, sondern als innere Reise eines Menschen, der dasselbe Prinzip entdeckt hat, das die Klasse in dieser Epoche erlebt hat.

Zur Dramaturgie:

- Die Biographie folgt einer inneren Logik: Technik → Krieg → Skepsis → Kunst → Anthroposophie → Entdeckung. Jeder Schritt folgt aus dem vorigen. Der Lehrer macht diese innere Logik sichtbar.
- Den Unterschied zwischen Kreisumstülpung und Würfelumstülpung klar benennen − nicht um zu verwirren, sondern um zu klären: zwei verschiedene Wege zum selben Prinzip.
- Das Gedicht von Schatz kann langsam, mit Pausen vorgelesen werden. Es darf wirken.

Zur Biographie:

- Schatz stammte aus einem jüdischen Elternhaus (Vater Samuel Schatz). Das muss im historischen Kontext der 1930er Jahre bedacht werden − Schatz lebte ab 1927 in der Schweiz, was ihm die Verfolgung ersparte.

- Die Verbindung zu Rudolf Steiner und zur Anthroposophie ist für Waldorfschüler besonders bedeutsam. Schatz lebte in Dornach, dem Zentrum der Anthroposophischen Gesellschaft.
- Das Schweizer Patent Nr. 500.000 ist ein konkretes Detail, das die Schüler beeindruckt − es zeigt, dass das Oloid nicht nur Philosophie ist, sondern industrielle Realität.

Zum Schema der Würfelumstülpung:

- Das Schema (Wuerfel_Umstuelpung_Schema.svg) kann an der Tafel gezeigt werden. Es zeigt die drei Phasen schematisch − nicht fotorealistisch.
- Wenn ein echter umstülpbarer Würfel vorhanden ist: jetzt vorführen. Die Schüler sollen sehen, was Schatz entdeckt hat.
- Wenn kein Würfel vorhanden: auf die Animation unter de.wikipedia.org/wiki/Umstülpbarer_Würfel verweisen. Oder: eine interessierte Gruppe kann ihn am Wochenende nach der Bauanleitung von Franz Zanek (www.fzk.at) bauen.

Zum Stundenplan:

- Stunde 15/16: Demonstration der Würfelumstülpung; Übergang zum Oloid
- Stunde 17/18: Bau des Oloids aus farbigen Ellipsen − Konstruktionsanleitung und haptische Prüfung
- Stunde 19/20: Weltanschauliche, botanische und astrophysikalische Folgerungen − Epochenabschluss

15. Stunde − Die Würfelumstülpung: vom Körper zur Bewegung

Epochenheft-Eintrag 15. Stunde

Demonstration: der umstülpbare Würfel

Wir beobachten den umstülpbaren Würfel von Paul Schatz. Er ist kein vollständiger Würfel mehr, sondern ein Gürtel − der mittlere Teil eines Würbels, nachdem von zwei diagonal gegenüberliegenden Ecken je ein Drittel des Volumens entfernt wurde.

Was bleibt, ist eine Kette aus sechs gleichen, gelenkig verbundenen Tetraedern. Diese Kette kann in einer endlosen, rhythmisch pulsierenden Abfolge umgestülpt werden.

[Demonstration: umstülpbarer Würfel − live oder Animation (de.wikipedia.org/wiki/Umstülpbarer_Würfel)]

Drei Beobachtungsaufträge

Beobachtungsauftrag 1: *Die Form*

Der Gürtel besteht aus sechs gleichen, ungleichförmigen Tetraedern, die an ihren Stoßkanten gelenkig verbunden sind. Jedes Glied kann sich um seine eigene Längsachse drehen. Die Kette hat keine feste Vorder- oder Rückseite − sie ist symmetrisch in sich selbst.

Beobachtungsauftrag 2: *Innen und Außen*

Was war innen, wird außen. Was war außen, wird innen. Die Flächen der Tetraeder wechseln die Seite − genau wie beim Kreis, nur jetzt im dreidimensionalen Raum. Der Farbwechsel, den wir in der Kreisumstülpung mit Gelb und Blau verfolgt haben, vollzieht sich hier haptisch: man spürt, wie die innere Fläche zur äußeren wird.

Beobachtungsauftrag 3: *Die Raumdiagonale und ihre Spur*

Zwischen den entsprechenden Punkten der Würfelkette bleibt in allen Lagen der ursprüngliche Abstand erhalten − die Länge der Raumdiagonalen des Würfels. Diese Diagonale beschreibt beim Umstülpen eine Kurve im Raum. Diese Kurve ist die Spur, aus der das Oloid entsteht.

[Zeichnung: Raumdiagonale und ihre Spur beim Umstülpen]

> **Die Umstülpbewegung der Würfelkette in endloser, rhythmisch pulsierender Abfolge nannte Schatz Inversionsbewegung − eine eigenständige Bewegungsform neben Translation und Rotation.**

Was entsteht aus der Spur der Raumdiagonalen?

16. Stunde − Das Oloid: Entstehung, Form, Rollbewegung

Epochenheft-Eintrag 16. Stunde

Entstehung des Oloids aus der Würfelumstülpung

Die Spur der Raumdiagonalen beim Umstülpen ergibt eine geschlossene Kurve im Raum. Paul Schatz erkannte: diese Kurve ist der Rand einer Kreisscheibe. Und ihr Spiegelbild − die Spur der gegenüberliegenden Diagonale − ist der Rand einer zweiten Kreisscheibe, senkrecht zur ersten.

Das Oloid entsteht als die konvexe Hülle dieser beiden Kreisscheiben.

Die geometrische Bedingung

Zwei gleich große Kreisscheiben mit Radius r stehen senkrecht zueinander. Sie sind so ineinandergesteckt, dass der Mittelpunkt jedes Kreises auf der Kreislinie des anderen liegt.

> **Geometrische Bedingung: Radius r = Abstand der beiden Mittelpunkte = r. Jeder Mittelpunkt liegt auf der Kreislinie des anderen.**

Die konvexe Hülle dieser beiden Scheiben − die kleinste konvexe Form, die beide vollständig einschließt − ist das Oloid.

[Zeichnung: zwei senkrechte Kreisscheiben und ihre konvexe Hülle = Oloid]

Die Rollbewegung − phänomenologisch

Das Oloid besitzt eine einzigartige Eigenschaft: es ist der einzige bekannte geometrische Körper, der über seine gesamte Oberfläche abrollen kann. Jeder Punkt der Oloid-Oberfläche berührt beim Rollen die Ebene.

Die Bewegung ist nicht gleichförmig rotierend wie bei einer Kugel oder einem Zylinder − sondern taumelnd, rhythmisch pulsierend. Das Oloid bewegt sich seitlich, schaukelt, dreht sich − und beschreibt dabei eine komplexe, lebendige Bewegung im Raum.

Diese Bewegung erinnert an die Inversionskinematik des Würbels, aus dem das Oloid entstanden ist. Das Rollen ist die Erinnerung an die Umstülpung.

[Demonstration: Oloid rollt auf der Ebene]

Verbindung zur Ellipsen-Stunde

Wir haben in Stunde 13 ein Gedankenexperiment durchgeführt: eine liegende Ellipse geht durch den Nullpunkt und wird zur aufgerichteten Ellipse. Vorher und Nachher sind durch den Nullpunkt getrennt.

Das Oloid ist die räumliche Verwirklichung dieses Gedankenexperiments: die liegende und die aufgerichtete Ellipse − in diesem Fall Kreisscheiben − ineinandergefügt, gleichzeitig im Raum vereint.

> **Das Oloid ist der eingefrorene Moment des Durchgangs − Ausgangs- und Endfigur der Umstülpung, gleichzeitig im Raum vereint. Seine Rollbewegung ist die Erinnerung an den Prozess, aus dem es entstanden ist.**

Wie bauen wir das Oloid selbst − und was können wir dabei haptisch erfahren?

Lehrernotiz zu Stunde 15 und 16

Methodisch-didaktische Hinweise

Lehrernotiz

Stunde 15 ist eine Beobachtungsstunde − die Schüler schauen, beschreiben, fragen. Stunde 16 ist eine Erarbeitungsstunde − die geometrische Bedingung des Oloids wird verstanden, bevor es in Stunde 17/18 gebaut wird.

Zu Stunde 15:

- Die Demonstration steht im Mittelpunkt. Wenn ein echter umstülpbarer Würfel vorhanden ist: damit beginnen. Die Schüler sollen ihn sehen, nicht selbst umstülpen − das kommt in Stunde 17/18 mit dem Oloid.
- Wenn kein Würfel vorhanden: Animation auf de.wikipedia.org/wiki/Umstülpbarer_Würfel am Beamer zeigen. Mehrfach, langsam.
- Die drei Beobachtungsaufträge nacheinander, mit Zeit dazwischen. Erst beobachten lassen, dann beschreiben lassen, dann in den Eintrag aufnehmen.
- Die Raumdiagonale ist der Schlüssel zum Oloid. Der Lehrer kann mit einem Faden oder einem Stab die Diagonale im Würfel sichtbar machen und zeigen, wie sie beim Umstülpen eine Kurve beschreibt.
- Die Schlussfrage (Was entsteht aus der Spur?) bleibt offen − Antwort kommt in Stunde 16.

Zu Stunde 16:

- Die geometrische Bedingung des Oloids ist präzise und einfach: r = Abstand der Mittelpunkte = r. Das ist überraschend elegant − der Lehrer lässt es wirken.
- Die konvexe Hülle als Begriff: wenn die Schüler ihn nicht kennen, eine einfache Erklärung: 'Strecke einen Gummiband um beide Scheiben − die Form, die entsteht, ist die konvexe Hülle.'
- Die Rollbewegung unbedingt demonstrieren − live oder per Video. Die taumelnde Bewegung ist das Eindrucksvollste am Oloid und motiviert den Bau in Stunde 17/18.
- Die Verbindung zur Ellipsen-Stunde 13 explizit herstellen: die Schüler sollen erkennen, dass das Oloid nicht neu ist − sie haben es in Stunde 13 bereits gedacht.

Zur Vorbereitung Stunde 17/18:

- Für den Bau des Oloids werden benötigt: zwei gleich große Kreisscheiben aus farbiger, biegsamer Folie oder Pappe (eine gelb, eine blau), Schere, eventuell Klebstoff oder Klebeband für die Verbindung.
- Die genaue Konstruktionsanleitung folgt in Stunde 17/18.

17./18. Stunde − Bau des Oloids und haptische Prüfung

Epochenheft-Eintrag Stunde 17/18

Geometrische Grundlage des Baus

Das Oloid besteht aus zwei gleich großen Kreisscheiben, die senkrecht zueinander ineinandergesteckt sind. Jeder Mittelpunkt liegt auf der Kreislinie der anderen Scheibe. Ein Drittel jedes Kreisumfangs (120°) liegt innerhalb der konvexen Hülle − dieser Teil wird beim Ineinanderstecken verdeckt. Die sichtbare Außenfläche besteht aus den verbleibenden zwei Dritteln jedes Kreisbogens (240° = 4π/3).

> **Geometrische Bedingung: Radius r = Abstand der Mittelpunkte M1M2 = r Einschnitt: je 120° (= ein Drittel des Kreisumfangs) pro Scheibe**

Bemerkenswürdig: die Oberfläche des Oloids ist gleich groß wie die Oberfläche einer Kugel mit demselben Radius r. Das Oloid und die Kugel haben dieselbe Oberfläche − bei völlig verschiedener Form.

Materialliste

– 2 Kreisscheiben aus biegsamer, farbiger Folie oder steifem Karton − eine gelb, eine blau
– Radius r nach Wahl (empfohlen: 12–15 cm für gut handhabbare Größe)
– Zirkel und Lineal
– Winkelmesser
– Schere
– Klebeband (durchsichtig) oder dünner Faden zum Fixieren
– Bleistift zum Markieren

Konstruktionsanleitung

[Zeichnung: Kreisscheibe mit eingezeichnetem 120°-Einschnitt und Markierungen]

Schritt 1: ***Kreisscheiben zeichnen und ausschneiden***

Zeichne mit dem Zirkel zwei gleich große Kreise mit Radius r auf die farbigen Folien − einen auf die gelbe, einen auf die blaue. Schneide beide Scheiben sauber aus.

Schritt 2: ***Mittelpunkt markieren***

Markiere den Mittelpunkt M jeder Scheibe. Er ist der Ausgangspunkt des Einschnitts und muss genau bestimmt sein.

Schritt 3: ***Den Einschnitt bestimmen***

Mit dem Winkelmesser: markiere einen Winkel von 120° (= ein Drittel des Vollkreises) am Mittelpunkt. Die Einschnittlinie geht vom Rand des Kreises (an der einen Markierung) geradlinig zum Mittelpunkt.

Schritt 4: ***Einschnitt schneiden***

Schneide entlang der Einschnittlinie − vom Rand bis zum Mittelpunkt. Dieser radiale Schnitt ermöglicht das Ineinanderstecken der beiden Scheiben.

[Zeichnung: zwei Scheiben mit Einschnitten, bereit zum Ineinanderstecken]

Schritt 5: ***Die geometrische Bedingung prüfen***

Lege die gelbe Scheibe flach auf den Tisch. Halte die blaue Scheibe senkrecht dazu. Schiebe die blaue Scheibe mit ihrem Einschnitt in den Einschnitt der gelben − von oben nach unten. Die Bedingung ist erfüllt, wenn: (a) beide Scheiben senkrecht zueinander stehen, (b) der Mittelpunkt M□ der gelben Scheibe auf der Kreislinie der blauen liegt, und (c) der Mittelpunkt M□ der blauen Scheibe auf der Kreislinie der gelben liegt.

Schritt 6: ***Fixieren***

Wenn die geometrische Bedingung erfüllt ist: die Scheiben an ihren Schnittpunkten vorsichtig mit Klebeband fixieren, so dass sie ihre Position halten. Nicht zu fest − die Form muss noch leicht beweglich bleiben.

[Zeichnung: fertiges Oloid von vorne und von der Seite]

Haptische Prüfaufgaben

Jeder Schüler hält sein Oloid in den Händen und bearbeitet folgende Aufgaben:

1. Farben: Welche Farbe ist innen, welche außen? − Dreht das Oloid langsam in den Händen und beobachtet, wie Gelb und Blau die Seiten wechseln, je nachdem, von welcher Seite ihr schaut.
2. Grenze: Wo ist die Grenze zwischen Gelb und Blau? − Folgt der Grenzlinie mit dem Finger. Was für eine Linie ist das? Ein Kreisbogen? Eine Gerade? Eine Kurve?
3. Krümmung: Fährt mit dem Finger über die Oberfläche − von der gelben Seite zur blauen. Spürt ihr die Krümmungsumkehr? Was vorher konvex war, wird konkav.
4. Kreisscheiben: Könnt ihr die zwei Kreisscheiben noch erkennen − oder sind sie in der konvexen Hülle verschwunden? Zeigt, wo die Kreisscheiben liegen.
5. Rollbewegung: Legt das Oloid auf eine glatte Fläche und rollt es. Beschreibt die Bewegung: gleichmäßig? Taumelnd? Rhythmisch? Berührt jeder Punkt der Oberfläche die Unterlage?
6. Verbindung zur Epoche: Erkennt ihr die liegende und die aufgerichtete Ellipse aus Stunde 13? Wo sind sie im Oloid?

Ergebnisse der haptischen Prüfung

Gelb: eine Seite der konvexen Hülle

Blau: die andere Seite der konvexen Hülle

Die Grenze zwischen Gelb und Blau ist kein Kreis und keine Gerade − sie ist eine räumliche Kurve, die beide Kreisbögen verbindet.

Die Krümmung ändert sich beim Übergang von Gelb zu Blau − was konvex war, wird konkav. Die Umstülpung ist im Oloid eingefroren.

Die Rollbewegung ist taumelnd, nicht gleichmäßig rotierend. Jeder Punkt der Oberfläche berührt die Unterlage − das Oloid rollt über seine gesamte Oberfläche.

> **Das Oloid vereint in einer einzigen Form alles, was wir in dieser Epoche erlebt haben: die Umstülpung, den Farbwechsel, die Krümmungsumkehr, die Coincidentia Oppositorum. Es ist Geometrie, die man in den Händen halten kann.**

Lehrernotiz zur 17./18. Stunde

Methodisch-didaktische Hinweise

Lehrernotiz

Die 17./18. Stunde ist die handwerkliche Stunde der Epoche. Die Schüler bauen ihr eigenes Oloid − jeder sein eigenes. Der Bau dauert je nach Sorgfalt und Geschicklichkeit 20–40 Minuten. Die haptische Prüfung dauert weitere 20–30 Minuten.

Zur Vorbereitung:

- Folien vorschneiden oder als Bogen mitbringen. Empfehlung: steife, aber biegsame Folie (z.B. Overhead-Folie, eingefärbt) oder fester Karton. Zu dünne Folie hält die Form nicht; zu dicker Karton lässt sich nicht ineinanderstecken.
- Radius r = 12–15 cm ergibt ein gut handhabbares Oloid. Kleiner ist schwieriger zu bauen, größer ist unhandlich.
- Den 120°-Einschnitt genau markieren − ein Winkelmesser pro Tischgruppe genügt.

Zur geometrischen Bedingung:

- Der häufigste Fehler: die Scheiben werden nicht genau senkrecht zueinander gehalten, oder der Mittelpunkt liegt nicht auf der anderen Kreislinie. Der Lehrer geht herum und prüft.
- Wenn die Bedingung erfüllt ist, sieht das Oloid sofort 'richtig' aus − die charakteristische Form ist unverwechselbar. Wenn nicht, ist es schief und asymmetrisch.

Zur haptischen Prüfung:

- Die sechs Prüfaufgaben nacheinander, gemeinsam. Nicht jeder für sich − sondern der Lehrer stellt die Frage, die Schüler prüfen und beschreiben laut.
- Aufgabe 3 (Krümmungsumkehr) ist die anspruchsvollste. Der Lehrer zeigt, wie man den Finger von der konvexen zur konkaven Seite führt.
- Aufgabe 5 (Rollbewegung) ist das eindrucksvollste Ergebnis. Wenn möglich auf einer glatten Tischplatte oder dem Fußboden demonstrieren.
- Aufgabe 6 (Verbindung zur Epoche) ist der Rückblick: die Schüler erkennen die Ellipsen-Stunde 13 im haptischen Objekt.

Zur bemerkenswerten Eigenschaft:

- Die Gleichheit der Oberflächen von Oloid und Kugel (gleicher Radius) ist ein wunderbares Detail − mathematisch bewiesen, aber intuitiv überraschend. Es kann am Ende der Stunde erwähnt werden als Ausblick auf die Mathematik hinter dem Oloid.

- Quellenhinweis: Paul Schatz, Rhythmusforschung und Technik, Zürich 2008. Bauanleitung: R. Neumann, Pädagogische Forschungsstelle Kassel 2012.

Zum Stundenplan:

- Stunde 19/20: Weltanschauliche, botanische und astrophysikalische Folgerungen − Epochenabschluss.

19./20. Stunde − Epochenabschluss: Die Welt ist umstülpbar

Epochenheft-Eintrag zur 19./20. Stunde

1. Rückblick − der rote Faden

Wir begannen mit einem Rätsel: dem springenden Schnittpunkt C der zwei Geraden, der ins Unendliche floh, als die Geraden zu Parallelen wurden. Wir endeten mit einem Objekt in den Händen: dem Oloid. Dazwischen: Cusanus, der Peripheriepunkt, der Nullpunkt, die Explosion des Keims, Angelus Silesius, Paul Schatz.

Der rote Faden war stets derselbe:

> **Innen wird Außen. Das Kleinste wird das Größte. Der Schluss erzeugt den Anfang.**

2. Astrophysik − der Kosmos stülpt sich um

Wir haben in Stunde 8 die Explosion des blauen Keims aus dem Nullpunkt erlebt: in einer Millisekunde füllte das Blaue das gesamte All. Das ist das Bild des Urknalls − die Explosion aus einer Singularität, die keine Ausdehnung hatte, aber alles enthielt.

Und was geschieht am Ende? Die Wissenschaftler haben mehrere Szenarien entwickelt:

Big Crunch − der große Kollaps: Das Universum expandiert, erreicht seine maximale Ausdehnung und kontrahiert dann wieder − bis alles in einem heißen und dichten Zustand zusammenfällt. Das ist das Spiegelbild des Urknalls.

Big Bounce − der große Rückprall: Das Universum ist zyklisch. Der Big Crunch wird von einem neuen Urknall gefolgt, der ein neues Universum hervorbringt. Die Big-Bounce-Theorie geht von einer Quantisierung der Raumzeit aus und vermeidet so die problematischen Singularitäten.

Roger Penrose − die konforme zyklische Kosmologie: Das unendlich ausgedehnte, erkaltete Ende des Universums − in dem keine Materie mehr existiert − wird konform abgebildet auf den Anfang eines neuen Universums. Der Peripheriepunkt wird zum neuen Nullpunkt. Das Größte wird zum Kleinsten.

Das ist unser Kreiszyklus im kosmischen Maßstab:

> **Urknall (Nullpunkt) → Expansion → maximale Ausdehnung (Peripheriepunkt) → Kontraktion → Big Crunch (Nullpunkt) → neuer Urknall**

Auch die Wissenschaftler stehen vor demselben zweiten Abgrund, den wir in Stunde 7 erlebt haben: Was geschieht im Moment der Singularität? Was trägt uns *durch den Nullpunkt? Die Geometrie hat die Frage aufgeworfen − die Physik ringt noch mit der Antwort.*

3. Botanik − die Pflanze als lebendige Umstülpung

Die Pflanze vollzieht die Kreisumstülpung zweimal − in zwei Vegetationsschüben.

Erster Vegetationsschub − Keimung bis Blüte:

Die Pflanze wächst von unten nach oben − sie dehnt sich aus, streckt sich, öffnet sich. Die Rosenblüte bildet diesen Prozess perfekt ab: die Blütenblätter entfalten sich in einer schrittweisen Dehnung von innen nach außen, wie Kreisbüschel, die sich öffnen. Das Innerste der Pflanze tritt nach außen − Duft, Farbe, Form strahlen in den Kosmos.

Dann kommt der Durchgang durch die Gerade − der Peripheriepunkt. Die Blütenblätter sterben nacheinander ab − nicht weil sie sich schließen, sondern weil ihre Formkraft erschöpft ist. Sie haben das Unendliche berührt und lösen sich auf. Was bleibt, ist die Nabe − der Kern, der Übergang. Gang in den ersten Nullpunkt.

Zweiter Vegetationsschub − Fruchtbildung bis Samenreife:

Durchgang durch den 1. Nullpunkt. 2. Schub: Die Nabe schwillt zur Frucht heran. Die Frucht verdichtet sich − das Äußere zieht sich nach innen, die Form konzentriert sich. Mit dem Herbsttod sterben die Blätter ab. Die Frucht fällt in die Erde. Übergang in den Peripheriepunkt: Winter.

Im Samen ist die ganze Pflanze als Keim verborgen − nicht als Miniatur, sondern als Potenz. Das ist der 2. Nullpunkt. Und dann − wenn der Samen keimt − die Explosion: ein neuer Vegetationsschub beginnt. Die Pflanze wiederholt sich nicht − sie entwickelt sich.

Vegetationsschub	Bewegung	Geometrisches Entsprechung
Erster: Keimung → Blüte	Expansion, Öffnung	1. Nullpunkt → Peripheriepunkt
Zweiter: Frucht → Same	Verdichtung, Rückzug	Peripheriepunkt → 2. Nullpunkt
Keimung (neu)	Explosion	2. Nullpunkt → Expansion

Goethes Metamorphose der Pflanzen sieht genau das: jedes Organ der Pflanze ist eine Verwandlung desselben Urorgans − des Blattes. Die Umstülpung ist der Mechanismus dieser Metamorphose.

4. Lebensrhythmus − Wachen, Schlafen, Biographie, Reinkarnation

Das Denkmuster der Umstülpung zeigt sich in jedem menschlichen Rhythmus − vom täglichen bis zum biographischen.

a) Wachen − Schlafen − Wachen:

Der tägliche Rhythmus ist die kleinste Umstülpung, die wir kennen. Bei Aufwachen aus dem Nullpunkt, in dem die Schlafphase endet, erweitert sich das erwachte Bewusstsein schrittweise. Abends verliert es nach und nach den Fokus: Das Ich verliert den Horizont des Tages-Bewusstseins, weil er sich immer mehr sich. Die

Gedankenbildung verliert die logische Form. Die Ausdehnung des Bewusstseins führt es über ins Träumen. Beim Einschlafen öffnet sich der Abgrund. Verlust des Ich-Bewusstseins. Was tagsüber weit ausgebreitet war, kehrt sich nach innen: Umstülpung durch die Gerade in das ‹Hinten›: Umstülpung des Bewusstseins. Der Mitternachts-Moment: Der Gang durch den Peripheriepunkt. Was innen war, ist nun außen. Von außen wird die Leiblichkeit im tiefen Schlaf wieder erfrischt. Das Bewusstsein ist außer dem Leibe, es ist sich selber unbewusst. Dabei Verarbeitung der vergangenen Tageserlebnisse und Vorbereitung der kommenden Tagesphase. Annäherung an den Nullpunkt und das Aufwachen: Wiedereintritt des Ich in den Körper. Beim Erwachen: Das Ich des Tagesbewusstseins entfaltet sich wieder, erfrischt, erneuert. Wir kommen nicht als dieselben zurück − wir kommen gestärkt zurück mit neuen Aufgaben, die in der Nachtphase vorbereitet wurden…

b) Biographie des Einzelmenschen:

Erster Schub: Geburt bis Lebensmitte − Expansion, Wachstum, Entfaltung. Das Kind kommt aus dem Nullpunkt und wächst in die Welt hinein, entfaltet sich anfangs deutlich in 7-Jahres-Schritten. In der Lebensmitte in den dreißiger Jahren sind die Ich-Kräfte auf ihrem Höhepunkt, das Leben ist weit ausgebreitet. Es beginnt der Abbau der Leibeskräfte. Die erste Umstülpung tritt ein. Da beginnt schon das Sterben − die Haare ergrauen, die Kräfte lassen nach. Im Alter löst das Ich sich langsam vom Leibe, man lebt in der Rückschau auf das eigene Leben und auf die Beziehung zu anderen Menschen. Wenn der Tod eintritt, fällt man in den Abgrund: Der Nullpunkt ist erreicht. Das Ende?

> **Hinweis für den Lehrer:** *Der folgende Gedanke geht über die Geometrie hinaus in den Bereich der Weltanschauung. Jeder Lehrer möge prüfen, ob und wie er ihn aufgreift.*

c) Reinkarnation − eine andere Lesart:

Was wäre, wenn nicht die Lebensmitte, sondern der Tod selbst der Peripheriepunkt wäre? Dann wäre der Tod nicht der zweite Nullpunkt − sondern die maximale Ausdehnung: der Moment, wo das Innerste vollständig nach außen tritt, wo die Hülle des Leibes abfällt wie die Blütenblätter. Man geht durch den Peripheriepunkt hindurch − ins Unendliche, in den geistigen Raum, der kein Außen hat. Und von dort − durch den Nullpunkt hindurch − in die Wiedergeburt. Ein neues Leben, wie ein neuer Entwicklungsschub. Im Nullpunkt wird alles vergessen, was vorher im Bewusstsein war. Aber das kleine Kind bringt die Spur seiner Grund-Bewegung – den Kreis – aufs Papier und, indem dieser Kreis sichtbar wird, setzt es ein Kreuz hinein. (Siehe Stunde 9) Doch in der Schule erstarrt der Kreis, wenn Zirkel und Lineal gebracht wird. Das Unendliche in ihm wird aus dem Bewusstsein gedrängt. Man erinnert sich nicht an das frühere Leben. Die Erinnerung kann erst dann eintreten, wenn das Bewusstsein durch den ganzen nachtodlichen Prozess erhalten bleibt. Das ist wie mit der dynamischen Geometrie: Was im Unendlichen geschieht, muss vom gewöhnlichen Bewusstsein erst begriffen sein, bevor es anschaubar wird.

	Lesart 1	Lesart 2

Nullpunkt	Geburt und Tod	Geburt und Wiedergeburt
Peripheriepunkt	Lebensmitte	Tod
Durchgang	Schlaf / Alter	Geistiger Zwischenzustand

Beide Lesarten sind geometrisch konsistent. Welche dem Wesen des Menschen entspricht − das ist keine mathematische Frage mehr. Die Geometrie hat uns bis hierher geführt und die Frage aufgeworfen. Das ist ihr Geschenk.

5. Ethik − der Denkwille und die Verantwortung

Ich bin es selbst, der am Tag in der Ausdehnung meines Ego-Kreises − in der Dehnung von innen nach außen − den anderen Menschen in meinem Lebensumkreis wegschiebt. Unbewusst, aber real: mein Kreis dehnt sich auf Kosten ihrer Kreise.

Und ich bin es selbst, der während der Nacht − nach der ersten Umstülpung − zusammen mit den anderen Menschen im umgestülpten Lebenskreis, das heißt im Geistgebiet − meine nächste Tagesverfassung vorbereitet: durch die Bearbeitung des Unbewussten, durch den Druck von außen nach innen, durch die Nachtarbeit des Schlafes.

Das geschieht in jedem Fall − ob ich es weiß oder nicht.

> **Es macht aber einen Unterschied, ob ich weiß, was ich da tue.**

Nicht im moralischen Sinne von Schuld und Strafe − sondern im geometrischen Sinne des Denkwillens. Der bewusste Denkwille, der weiß, dass er sich ausdehnt, kann fragen: Wo ist mein Peripheriepunkt? Wo endet mein berechtigtes Ausdehnungsstreben − und wo beginnt das des anderen? Der bewusste Denkwille erkennt die Grenze und ehrt sie.

Und der bewusste Rückblick vor dem Einschlafen − der Widdersprung des Tages − verändert die Nachtarbeit: sie wird fruchtbarer, heilsamer, schöpferischer.

Dasselbe gilt zwischen Tod und Geburt − in größtem Maßstab. Was ich im Leben anderen angetan habe, bewusst oder unbewusst, wartet im geistigen Zwischenzustand auf Verarbeitung. Die Karmabildung ist die kosmische Nachtarbeit. Auch hier macht der Denkwille einen Unterschied: Wer gelernt hat, bewusst durch die Abgründe des Denkens zu gehen, geht auch durch den Tod bewusster hindurch.

Geometrie ist also nicht wertneutral. Sie ist − wenn sie tief genug gedacht wird − Ethik.

6. Weltanschauung − die dynamische Geometrie

Die Geometrie, die wir in dieser Epoche betrieben haben, ist nicht die Schulgeometrie − nicht das ruhige Vermessen von Dreiecken und Kreisen. Das ist nützlich und notwendig − aber es ist nicht das, was uns hier beschäftigt hat.

Was uns beschäftigt hat, ist die dynamische Geometrie − jene Geometrie, die Cusanus begründet hat, indem er das Endliche nicht als gegeben hinnahm, sondern fragte: woher kommt es? Und die Antwort suchte − nicht in der Empirie, sondern im Denken selbst.

Diese Geometrie hat die Kühnheit, das Unendliche zu denken. Nicht zu berechnen – es zu denken. Sie geht an die Grenze des Verstandes − und überschreitet sie mit dem Denkwillen. Sie tritt in den ersten Abgrund − und lässt sich vom Kreisgesetz hindurchtragen. Sie tritt in den zweiten Abgrund − den Nullpunkt − wo alle Gesetze schweigen. Und sie hält den Denkwillen aufrecht, auch dort, wo nichts mehr trägt.

Was findet sie?

Sie findet − im Rückblick, im Widdersprung − dass der Denker, der diese Abgründe durchdringt, sich selbst als den Weltprozess findet. Nicht als Beobachter des Prozesses − sondern als der Prozess selbst. Der Denkwille, der den Kreis durch den Nullpunkt trägt, ist derselbe Wille, der den Keim durch die Erde trägt, der das Universum durch den Big Bounce trägt, der die Seele durch den Tod trägt.

Das Unendliche im Endlichen zu suchen und zu finden − das gelingt nicht durch ruhiges Berechnen. Es gelingt durch das denkende Durchdringen des Abgrunds. Durch die docta ignorantia − das gelehrte Nichtwissen, das weiß, dass es nicht weiß − und gerade deshalb weitergeht.

> ***„Gott ist der Kreis, dessen Mittelpunkt überall ist, sagten die Alten.“*** **− Nikolaus von Kues, De docta ignorantia**

Und der Denker, der diesen Kreis durch seine Abgründe trägt, entdeckt: er ist selbst dieser Mittelpunkt. Er ist überall und nirgendwo. Ein Tüpfchen und ein Kreis.

7. Schluss − das Oloid als Symbol

Das Oloid liegt in unseren Händen. Es rollt − taumelnd, rhythmisch, lebendig. Es hat keine Vorder- und keine Rückseite. Es hat kein Oben und kein Unten. Jeder Punkt seiner Oberfläche berührt die Erde, wenn wir ihn bewegen.

Es ist das Symbol dieser Epoche.

Es vereint in einer einzigen Form alles, was wir erlebt haben: die Umstülpung, den Farbwechsel, die Krümmungsumkehr, den Peripheriepunkt, den Nullpunkt, die Coincidentia Oppositorum. Es ist Geometrie, die man in den Händen halten kann.

Paul Schatz hat es aus dem Würfel befreit. Cusanus hat es im Denken gefunden. Und wir haben es in dieser Epoche − mit den Armen, mit dem Denkwillen, mit Zirkel und Lineal, mit farbiger Folie − selbst vollzogen.

> ***„Ich bin nicht, was ich weiß, ich weiß nicht was ich bin, ein Ding und nicht ein Ding, ein Tüpfchen und ein Kreis.“*** **− Angelus Silesius, Der Cherubinische Wandersmann (1675)**

Die Welt ist umstülpbar.

Lehrernotiz zur 19./20. Stunde

Methodisch-didaktische Hinweise

Lehrernotiz

Die letzte Stunde ist die freieste der Epoche. Sie ist kein Abschluss im Sinne einer Zusammenfassung − sie ist eine Öffnung. Der Lehrer wählt aus den sieben Abschnitten, was er aufgreifen möchte und was nicht. Nicht alles muss in einer Stunde gesagt werden.

Zur Dramaturgie:

- Mit dem Rückblick beginnen − kurz, nicht ausführlich. Die Schüler sollen den roten Faden selbst benennen. Der Lehrer fragt: Was war das Prinzip dieser Epoche?
- Die Abschnitte 2–6 können je nach Zeit und Klasse unterschiedlich gewichtet werden. Astrophysik und Botanik sind für alle Schüler zugänglich. Lebensrhythmus und Ethik brauchen Reife. Weltanschauung ist der tiefste Abschnitt.
- Den Schluss mit dem Oloid nicht kürzen. Die Schüler halten ihr selbst gebautes Oloid in der Hand − das ist das stärkste Bild des Abschlusses.

Zur Astrophysik:

- Die drei Szenarien (Big Crunch, Big Bounce, Penrose) nicht als Fakten präsentieren, sondern als Fragen. Die Wissenschaft ist sich nicht einig. Das ist ehrlich − und es verbindet mit Cusanus: auch die Wissenschaft kennt die docta ignorantia.

Zur Botanik:

- Wenn möglich eine echte Rose mitbringen − oder das Bild einer Rose in verschiedenen Stadien zeigen. Das Abfallen der Blütenblätter ist kein Tod, sondern der Durchgang durch den Peripheriepunkt.
- Den Bezug zu Goethe herstellen: die Metamorphose der Pflanzen (1790) ist das erste wissenschaftliche Werk, das die Pflanze als Prozess versteht.

Zum Lebensrhythmus:

- Der Widdersprung als biographisches Prinzip: der Lehrer kann aus eigenem Leben erzählen − wenn er es vertreten kann. Nichts Aufgesetztes.
- Die Reinkarnation: der Warnhinweis im Epochenheft gilt. In der Waldorfschule ist dieser Gedanke vertraut − aber nicht alle Schüler kommen aus diesem Hintergrund. Als offene Frage formulieren, nicht als Lehrmeinung.
- Der Lehrer kann den Reinkarnationsgedanken auch in die Lehrernotiz verlegen und im Schülereintrag nur die erste Lesart stehenlassen.

Zur Ethik:

- Der Satz 'Es macht einen Unterschied, ob ich weiß, was ich tue' ist der ethische Kernsatz. Er kann an die Tafel geschrieben werden − ohne Kommentar.
- Den Karma-Gedanken behutsam einbringen − er hängt direkt mit dem Reinkarnationsgedanken zusammen.

Zur Weltanschauung:

- Dieser Abschnitt ist der schwerste − und der wichtigste. Der Lehrer liest ihn vor, wenn er ihn vertreten kann. Sonst weglassen.
- Der Schlüsselsatz: 'Der Denker, der diese Abgründe durchdringt, findet sich selbst als den Weltprozess.' Das ist keine Hybris − das ist die Erkenntnis, dass Denken und Sein nicht getrennt sind.

Zum Schluss:

- Das Oloid rollen lassen − in der Stille. Kein Kommentar nötig.
- Das Angelus-Silesius-Zitat als letztes Wort. Dann Stille.

Literatur und interaktive Grafiken

Alle Dokumente hier zugänglich (https://menschenkunde.com/pdf/mathesis/)

Christina Moratschke, Projektivität und Raum,
https://mas.goetheanum.org/en/ueber-uns/moratschke-christina

Eric Alina, Kreis und Punkt. In: Seelenpflege, Heft 3, Michaeli 1983

Bernhard Schwalenbach, Punkt und Kreis. Zeitschrift Seelenpflege 1/2001 - Ostern 2001 – und andere Texte

Rudolf Steiner in ‹Mein Lebensgang› über Geometrie

Rudolf Steiner über Kreisumstülpung und Zeitprozess

Rudolf Steiner, Platonische Mystik und docta ignorantia – Mathesis (GA 51).pdf

Nikolaus von Cues, Auszug zur Geometrie aus ‹De docta ignorantia›

Das Goetheanum – die Konstruktion durch die Kreise des Apollonios.

Adolf Fischer, Wege zum unendlich Fernen (Erziehungskunst 1 – 1995)

Anne Hallen, Vom Punkt zum Kreis (Punkt und Kreis 2020, Nr. 8 Michaeli)

Dr. med. Walter Holtzapfel, Punkt und Kreis im Heilpädagogischen Kurs

Rudolf Steiners

Regine Kather, ‹Gott ist der Kreis, dessen Mittelpunkt überall ist…›

Thomas Külken, Ich bin ein Punkt und ein Kreis

Hella Wiesberger: Punkt – Kreis –Umkreis als Prinzip der anthroposophischen Geisteswissenschaft

Rüdiger Blankertz, Die vollständige Kreismetamorphose mit KI Gemini entwickelt

Rüdiger Blankertz, Reflexion über Claude mit Claude am Mathesisprojekt

*

Tabelle der Entfernungen von M im Umstülpungsprozess

Wertetabelle Dreieck: Schnittpunkt C auf seiner Reise ins Unendliche

Grafik

Inversion am Kreis.html

Inversion am Kreis interaktiv.html

Inversion Version negativ.html

Inversion Version2 grosser Canvas.html

Inversion Version3 Animation.html

Schnittpunkt C bewegung.html

[Schnittpunkt C bewegung2.html]
[Ouroboros alquimica.jpg]
[Riemann Kugel.JPG]
[Riemann_Kugel_Stereographische_Projektion.jpg]