alfred hoehn

Aufsatz über den Grundriss des ersten Goetheanums im Zusamenhang mit Harmonik und goldenem Schnitt

15. April 2000

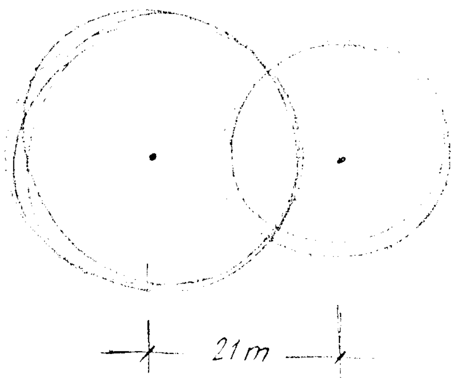
DIE KREISE DES APOLLONIOS

In der Silvesternacht des Jahres 1922 wurde durch Feuer ein Werk vernichtet, welches in seinem kaum zehnjährigen Bestehen seit der Grundsteinlegung durch seine Ausdruckskraft, seine Gebärde und seine innere mathematische Festigkeit zu uneingeschränkter Bewunderung und Berühmtheit gelangte.

Der geistige Vater des ersten Geotheanums, Rudolf Steiner, hatte die grundlegende Idee eines Doppelkuppelbaus bereits im Jahr 1908 im Hinblick auf die Bauabsichten der Münchner Gesellschaft. Der an diesem Projekt beteiligte Baufachmann Alexander Strakosch erhielt von Rudolf Steiner lediglich die Angabe von zwei sich durchdringenden Kreisen als Grundrissidee. Auf seine Frage, wie denn und in welchem Verhältnis sich die Kreise durchdringen sollen, erhielt er von Steiner die Antwort: "Das sollen Sie herausbekommen!"

Der Architekt Schmid-Curtius, welcher später mit der Grundrissgestaltung des Dornacher Baus beauftragt wurde, erhielt ebenfalls die Angabe der zwei ineinandergeschobenen Kreise mit dem Zusatz, dass diese Kreise Zuschauerraum und Bühne darstellen sollen. Ausserdem wurde Schmid-Curtius' Autrag näher kongretisiert, indem nämlich der Abstand der beiden Kreismittelpunkte 21 Meter betragen müsse (vgl. Figur 1).

Figur 1



Der Architekt war also in seiner schöpferischen Freiheit keineswegs vom Bauherrn eingeschränkt. So gelang ihm im Jahr 1912 eine geometrische Konstruktion des Grundrisses, welche die Zustimmung Steiner's erlangte.

Ueber den Vorgang der Schmid-Curtius'schen Konstruktion existieren verschiedene Varianten, welche mit sehr geringen Abweichungen zu einem mathematisch befriedigenden Resultat führen. Doch davon später. Im Originalplan des Grundrisses von Schmid-Curtius jedoch sind die folgenden Hauptmasse angegeben:

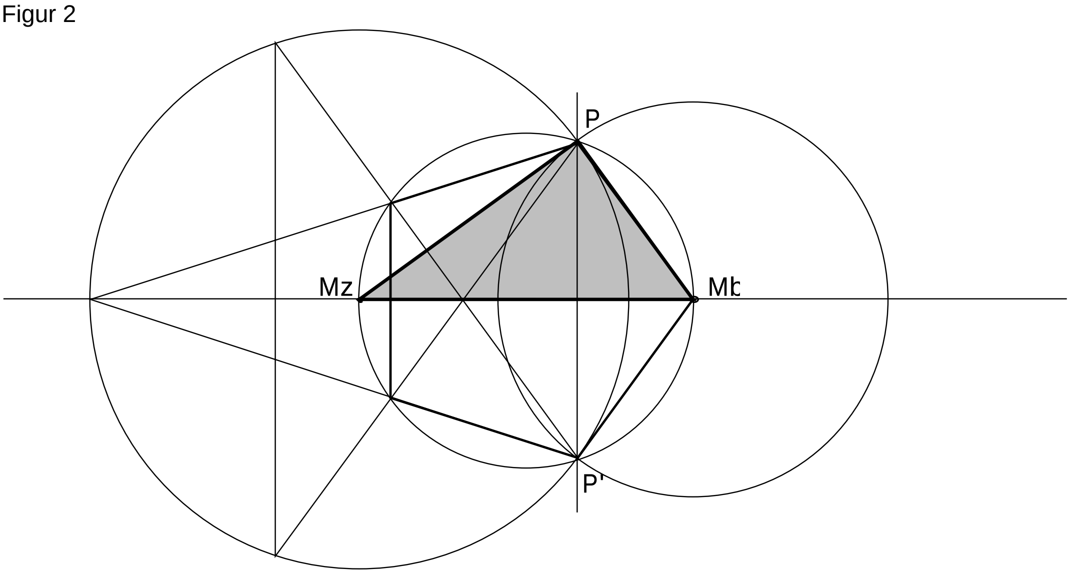
Abstand der Kreiszentren	=	21.00 m
Radius des grossen Kreises (Rz)	=	17.00 m

Radius des kleinen Kreises (Rb) = 12.40 m

Eine eingehende Analyse der Konstruktionspläne durch Carl Kemper führt zu der sicheren Annahme, dass Schmid-Curtius wie folgt vogegangen ist:

Er hat zunächst den "Urkreis" der Konstruktion, jenen also durch die beiden Kreismittelpunkte und mit einem Durchmesser von 21.00 m gezogen. Diesem hat er ein reguläres Fünfeck eingeschrieben, dessen Ecke auf der Symmetrieachse am Bau genau nach Osten zeigen sollte(vgl. Figur 2).

Figur 2

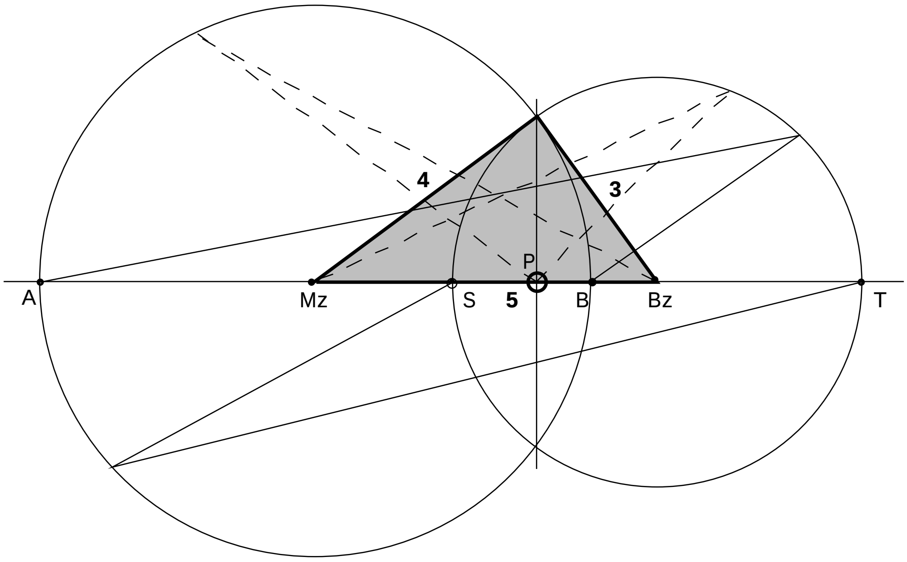


Durch die Schnittpunkte des "Urkreises" mit der Ost-Westachse waren nun die beiden Zentren der sich durchdrigenden Kreise gegeben, indem die Kreise von Mz (Mitte Zuschauerraum) und Mb (Mitte Bühnenraum) aus durch die Ecken P, resp. P` des im "Urkreis" eingeschriebenen Fünfecks gezogen wurden. Die Verlängerung je zweier Seiten und Diagonalen des Fünfecks im "Urkreis" ergeben auf dem Kreis des Zuschauerraumes ein Pentagramm, welches mit der Spitze zum Eingang nach Westen weist. Damit war das grundlegende Prinzip des Goetheanum-Risses gegeben. Wie Schmid-Curtius diese Grundidee weiter entwickelte, die Säulenkreise, den Standort des Rednerpults und andere wichtige Bezüge rein geometrisch ermittelte, kann in dieser kurzen Betrachtung nicht erläutert werden. Es sei an dieser Stelle auf das schöne Werk Carl Kemper's "Der Bau" hingewiesen, wo alle Details der Schmid-Curtius'schen Konstruktion ausführlich beschrieben sind.

Die wunderschöne Konstruktion aus dem Urkreis eröffnete Schmid-Curtius eine grosse Anzahl von Möglichkeiten, alle prägnanten Punkte, sowohl in der Ebene, als auch räumlich mit geometrischer Festigkeit präzis zu bestimmen. Allerdings ergibt die mathematische Berechnung der Radien um Mz und Bz bei Annahme des Urkreisdurchmessers mit 21.00 m geringfügige Abweichungen gegenüber dem vermassten Rissplan des Architekten. Angesichts der überwältigenden Grösse des Dornacher Bau's mögen diese Differenzen als nichtssagend angesehen werden oder zumindest als Auf- oder Abrundungen der irrationalen mathematischen Resultate, auf Masse. welche von den Bauleuten besser handzuhaben waren. Der Zug von Schmid-Curtius zur Ganzzahligkeitn der Kreisradien hat aber mit Bequemlichkeit überhaupt nichts zu tun, sondern eher mit der Ahnung des Architekten, dass nebst dem regulären Fünfeck auch andere Grundlagen für die Risskonstruktion möglich sind.

Lange Jahre später hat Carl Kemper bei der Bearbeitung des Nachlasses von Schmid-Curtius herausgefunden, dass die ausgeführte Lösung nicht die einzig mögliche war. Kemper ging von der wörtlichen Auslegung eines Vortrags von R. Steiner aus (21.6.1914), in welchem dieser im Zusammenhang mit dem Dornacher Bau den sogenannten Divisonskreis ausführlich beschrieb. Kemper suchte und fand. Er legte dem zu konstruierenden Divisionskreis die Proportion 3 : 1 zugrunde und kam so zu einer Grundrissgestaltung, welche wie jene von Schmid-Curtius hätte als Konstruktionsprizip für den Bau angenommen werden können (vgl. Figur 3).

Figur 3

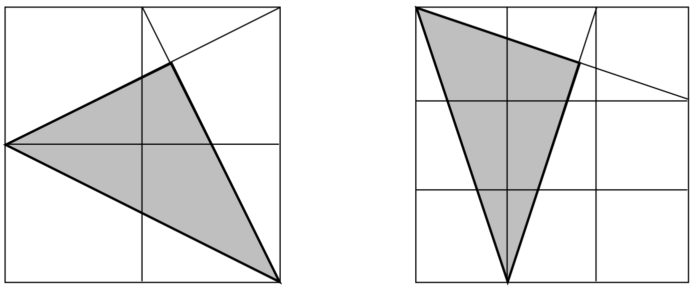


Der kleinere Kreis, der Bühnenkreis also ist der Divisionskreis 3 : 1 von den auf dem grossen Kreises (Zuschauerraumkreis) gelegenen Punkte A und B aus. Die Entdeckung des Divisionskreise wird dem griechischen Mathematiker Apollonios von Perge zugschrieben, weshalb Divisionskreise auch Apollonische Kreise genannt werden. Alle Geraden von A aus zum kleinen Kreis (Bühnenkreis) und von dort zurück auf Punkt B stehen im Verhältnis 3 : 1. Umgekehrt ist der Zuschauerraumkreis der Divisionskreis der Proportion 2 : 1 von den auf dem Durchmesser des Bühnenkreises gelegenen Punkten S und T ausgehend. Bei einem Abstand der beiden Kreismittelpunkte von 21.00 m ergeben sich mathematisch für die Radien Mz = 16.80 m und Mb = 12.60 m. Auf den ersten Blick kann man erkennen, dass es sich bei Kempers Konstruktion um rationale Durchmesserwerte handelt. Das erstaunlichste aber an seinem Riss ist aber die Tatsache, dass das aus den Kreismittelpunkten und dem Punkt der Berührung der Kreise sich ergebende Dreieck ein ägyptisches ist, ein solches also mit den Seitenproportionen 3/4/5 und demnach logischerweise ein rechtwinkliges. Im Riss von Schmid-Curtius ist dieses Dreieck ein halbes Segment des regulären Fünfecks mit irrationalen Seitenproportionen, anderseits aber mit den rationalen Winkelwerten 90/54/36 Grad. Bei Kemper ist es genau umgekehrt, denn das ägyptische Dreick weist rationale Seitenproportionen, hingegen aber irrationale Winkelwerte auf.

Die von Schmid-Curtius angewandte Risskonstruktion aus dem regulären Fünfeck, resp. dem Pentagramm kann man als ausgesprochen geometrisch-stereometrische Lösung des Proplems bezeichnen, denn sie lässt sich nach altem griechischen Postulat mit Zirkel und Lineal und ohne Festlegung eines Masses oder einer Proportion vollziehen. Sie ergibt sich ganz von alleine aus dem Phänomen des regulären Fünfecks. Stellt man die von Kemper gefundene Lösung gegenüber, so kann man trotz der geringfügingen Abweichungen der Kreisradien feststellen, dass hier die harmonikale Komponente die Grundlage für den Riss bildet. Die bei Kemper auftretenden Proportionen 3 : 1, 2 : 1, 3 : 4, 3 : 5, 4 : 5 usw. sind durchwegs ganzzahlig und bilden die Grundlage der pythagoreischen Harmonik. Pythagoras und seine Schüler waren es, welche es verstanden, dem Monochord diejenigen Töne zu entlocken, welche für das menschliche Ohr einen harmonischen Zusammenklang hatten, indem sie die Saiten des Intrumentes in eben solchen ganzzahligen Proportionen verkürzten. Bei Kempers Riss spielt also etwas herein, was die rein geometrische Aussage des Schmid-Curtius'schen Risses nicht auszusagen vermag: der Klang. Kemper lässt den Dornacher Bau in Oktave, Quinte, Quarte, kleine Sext usw. erklingen. Wie bereits bemerkt ist Schmid-Curtius bei seinem Riss aus dem regulären Fünfeck geringfügig von den sich aus der geometrischen Wirklichkeit ergebenden Massen abgewichen, indem er die irrationalen Werte auf rationale rundete. Fast scheint es, dass er bemerkt hatte, dass er sich auf einem Grenzgebiet der verschiedenen Wahrnehmungen bewegte.

Um zu verstehen, warum den Divisionskreisen der Proportionen 3 : 1 und 2 : 1 das ägyptische Dreieck zugeordnet ist, dient die Erklärung, dass aus jeder ganzzahligen Aufteilung eines Quadrates in kleinere Quadrate beliebige pythagoreische Dreiecke entstehen. So z.B. aus der der Drei- resp. Zweiteilung des Quadrats das ägyptische Dreieck (vgl. Figur 4). Dieses Theorem wird in der Arbeit „Gittergeometrie und pythagoreische Dreiecke“ von Alfred Hoehn und Hans Walser behandelt.

Figur 4



Die beiden rechtwinkligen Dreiecke, welche sich aus den Risskonstruktionen von Schmid-Curtius und Kemper ergeben, sind aber bei weitem nicht die einzigen prägnanten Artgenossen, deren Winkel zwischen Hypothenuse und kleiner Kathete zwischen 50 und 54 Grad liegen. Der Aegyptologe L. Borchardt hat in einer Art Kampfschrift gegen die mathematischen Fähigkeiten der alten Aegypter in einer Grafik aufgezeigt, dass ein Grossteil aller Basiswinkel der Pyramiden sich eben in dem genannten Rahmen befinden. Hätte Borchardt einen fantasievollen Mathematiker befragt, so hätte er wohl nicht mehr behaupten können, dass es sich bei der Wahl der Basiswinkel um Zufall, ja sogar um reine Bequemlichkeit handelte. Dies umsomehr, als sich herausstellte, dass die von Borchardt angegebene Basiswinkelberechnung der Chefrenpyramide ganz genau den grösseren spitzen Winkel des ägyptischen Dreiecks ergab. Was den Fall Borchardt betrifft, so kann man heute feststellen, dass er mit seiner Kampfschrift exakt das Gegenteil bewies, von dem, was er behauptete. Trotzdem ist man in Fachkreisen der Meinung, dass seit Borchardt die Kontroversen um die ägyptischen Pyramiden kein Thema mehr sind. Es ist zu befürchten, dass dereinst die Risse des Dornacher Bau's auch als Zufall betrachtet werden, weil sie in ihrer überwältigenden Einfachheit und Schönheit nicht mehr begriffen werden.

Die grösste und am sorgfältigsten gearbeitete Pyramide in Aegypten ist diejenige des Cheops. Der Baumeister, Wesir und Oberpriester Hem On verwendete für deren Planung ein Profildreick, welches nur ganz geringfügig vom ägyptischen Dreieck und demnach vom Dreieck im Schmid-Curtius'schen Riss abweicht. Und dennoch unterscheidet es sich von den beiden in Bezug auf seinen geistigen Gehalt. Das Bestimmungsdreieck des regulären Fünfecks, welches sich aus dem Riss von Schmid-Curtius ergibt, ist eindeutig eine geometrische Lösung und war für die bautechnische Anwendung des ersten Goetheanums wahrscheinlich am besten geeignet. Da es sich bei einem Bau um ein räumliches Gebilde handelt und hier im Speziellen um ein solches mit zwei sich durchdringenden Halbkugelkuppeln auf entsprechenden Zylindern, war wohl die Wahl des Risses von Schmid-Curtius die einzig richtige. Die Konstruktion aus dem regulären Fünfeck liess sich geometrisch klar in den Raum ausdehnen, was sich z.B. dadurch erklären lässt, dass 12 gleiche reguläre Fünfecke das Pentagondodekaeder ergeben, wenn man sie lückenlos zusammenfügt.

Carl Kemper, der unentwegte Sucher konnte sich damit alleine nicht zufrieden geben, umsomehr als ja der von R. Steiner stets im Zusammenhang mit dem Dornacher Bau erwähnte Divisionskreis von Schmid-Curtius nicht berücksichtigt worden ist. Was Kemper dann ausgehend vom Divisionskreis 3 : 1 gefunden hat, kann nicht genug bewundert werden, denn sein Riss, aus welchem auch das ägyptische Dreieck hervorgeht ist eine Vergeistigung der geometrischen Tatsachen am Bau. Seine Nachempfindung lässt das erste Goetheanum im Sinne der pythagoreischen Harmonik erklingen. Vom Rednerpult P (vgl. Figur 3) werden die Schallwellen zum Zuschauerkreis und von dort zur Mitte des Bühnenkreises in der Proportion 4 : 5, sozusagen als Terz geleitet. Vom Rednerpult hingegen zum Bühnenkreis und von dort zur Mitte des Zuschauerkreises kommt der Ton als grosse Sext zurück, in der Proportion 3 : 5 zurück (gestrichelte Linien in Figur 3).

Hem On's Profildreieck der Cheopspyramide unterscheidet sich vom ägyptischen Dreieck in seinen Winkeln um etwas mehr als ein Grad und von denjenigen in Schmid-Curtius' Riss um etwa 2 Grad. Dabei ist aber Hem On's Dreieck eine wahrhaftige Besonderheit und bedarf deshalb einiger historischer Erläuterungen: Nach Al Mamun's gewaltsamem Eindringen in die Cheopspyramide im 9. Jahrh. n. Ch. geriet Aegypten lange Zeit in Vergessenheit. Erst im 16. und 17. Jahrh. begannen sich italienische und englische Wissenschafter für das grösste kompakte Bauwerk der Erde zu interessieren. Mitte des letzten Jahrhunderts stellte J. Taylor aufgrund exakter Winkelmessungen von H. Vyse die beiden Theorien auf, welche bis heute zu unzähligen Kontroversen geführt haben.

1. Theorie:	kleine Kathete x Hypothenuse	= grosse Kathete im Quadrat
2. Theorie:	4 x kleine Kathete : grosse Kathete	= π

Die erste Theorie charakterisiert das Profildreieck eindeutig als ein solches, dessen kleine Kathete zur Hypothenuse in der Proportion 1 : 1.618033989...(1:τ) also im goldenen Schnitt steht. Dieses Dreieck wurde früher schon von J. Kepler eingehend behandelt und deshalb wird es auch gerne als "Keplerdreieck" bezeichnet.

Die zweite Theorie, welche vor allem vom schottischen Hofastronomen P. Smyth vertreten wurde, bedeutet, dass der Kreisbogen mit der Höhe der Pyramide als Radius die gleiche Länge aufweist, wie der Basisumfang der Pyramide. Diese Theorie wird vielfach als π-Theorie bezeichnet.

Beide Theorien kommen einander und ausserdem der messbaren Wirklichkeit so verblüffend nahe, dass nicht das Zufallspostulat Borchardt's, sondern der Ausspruch E. Bindel's als Erklärung gelten kann: "Dass der Erbauer der

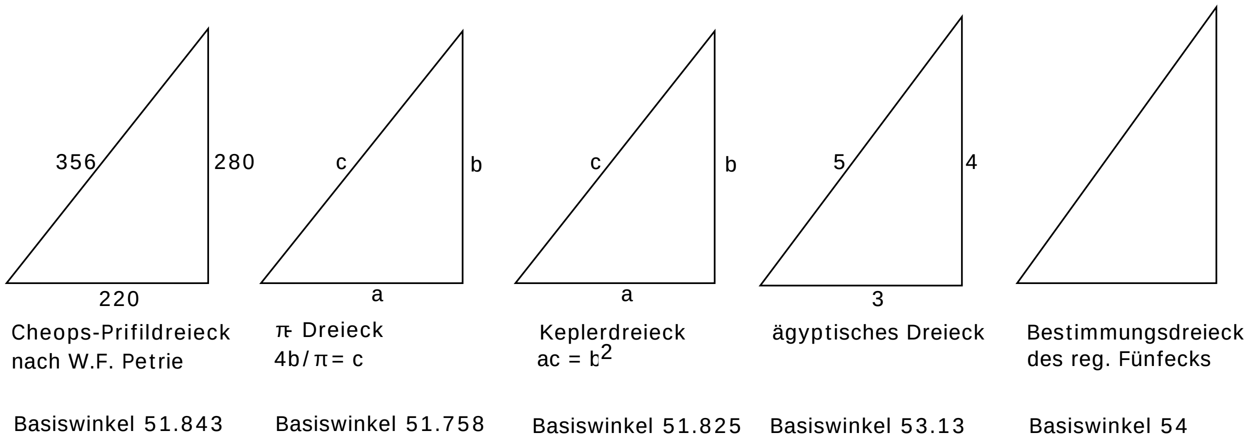
Cheopspyramide gerade diese und keine andere Form wählte, war nur dadurch möglich, dass er sich mit diesem göttlichen Schöpferwirken durch einen Hochstand seines Bewusstseins zu vereinigen vermochte, dass er die Mathematik noch als ein Wirken der Götter entgegenzunehmen vermochte".

Tatsächlich scheint es, dass Hem On die sich aus den beiden Theorien ergebenden Dreiecke zu einem völlig neuen Dreieck verschweisste, dessen Seiten ganzzahlige Ellenmasse aufweisen. Es ist der ausserordentliche Verdienst des englischen Aegyptologen W.F.Petrie, als erster auf die Rekonstruktionsidee gekommen zu sein. Seine sehr genauen Messungen bestärkten ihn in seiner Meinung, dass der Erbauer ein ganzzahliges Dreieck mit den den Seiten 220/280/356 Ellen als Profildreieck anwandten. Selbst Borchardt war von der Einfachheit der Idee so begeistert, dass er Petrie's Theorie zur wissenschaftlichen Tatsache erhob. Der Skeptiker und Verspotter des goldenen Schnitts hätte wohl Petrie's Theorie nicht anerkannt, wenn er folgendes bemerkt hätte: Teilt man nämlich die Seitenlängen des Profildreicks jeweils durch vier, so ergibt sich 55/70/89. 55 und 89 sind Zahlen der sogenannten Fibonacci-Reihe und somit dem goldenen Schnitt engstens verbunden.

In Figur 5 ist eine Auswahl der wichtigsten rechtwinkligen Dreiecke im Bereich des ägyptischen Dreiecks mit ihren jeweiligen Basiswinkeln dargestellt. Die Anzahl mathematisch oder historisch interessanter rechtwinkliger Dreiecke, deren Basiswinkel zwischen 50 und 54 Grad liegt, ist aber weit höher, als hier dargestellt werden kann. L. Borchardt führt in einer Tabelle allein 12 ägyptische Pyramiden innerhalb dieses Bereiches auf; K.H. Schüssler gar deren 20. Mathematisch interessant sind unter anderem: Das $\sqrt{3}$ - $\sqrt{5}$ - $\sqrt{8}$ - Dreieck, das Dreieck mit dem einen spitzen Winkel entsprechend dem Zentriwinkel des regulären Siebenecks, das "Würfelverdoppelungs"-Dreieck mit der Kathetenproportion $\sqrt[3]{2} : 1$. Wenn es darum geht, für ein Phänomen eine Erklärung zu finden, so ist es am einfachsten, wenn man das Phänomen zum Zufall erklärt. Diese bewährte Problemlösung kann auch hier zur Anwendung gelangen, aber es dürfte sehr schwer fallen, dieses Zufallsprinzip zu beweisen. Ob nun die Aegypter ihre Basiswinkel aus ästhetischen oder mathematischen Gründen in dieser "Gegend" ansiedelten; es ist jedenfalls klar, dass die Pyramiden existieren und dass hunderte von Archäologen ihre Basiswinkel nachgemessen haben. Dabei wurde noch ein Basiswinkelbüschel um die 43 Grad festgestellt, von 45 Grad aber keine Spur und ebenso wenig zwischen 43 und 50 Grad. Für die beiden Büschel gibt es eine ganz tolle Erklärung: Nimmt man einen Zylinder von z.B. einem Meter Durchmesser und wälzt diesen einmal auf einer Ebene um die eigene Achse, so hat dieser eine Strecke von 3.14159...m zurückgelegt. Diese Strecke sei die Basis und 4 mal der Durchmesser des Zylinders sei die Höhe des Profildreiecks der Pyramide. So erhält man genau die sog. π-Pyramide (vgl. Figur 5). Sticht man aber als Höhe nicht vier-, sondern nur dreimal den Durchmesser ab, so erhält man einen Repräsentanten des andern Büschels, nämlich ein rechtwinkliges Dreieck mit einem Basiswinkel von 43.678 Grad. 43.602 Grad weist der Basiswinkel des pythagoreischen Dreiecks 20/21/29 auf und eine ganze Anzahl alter Pyramiden, wie z.B. die des Snofru bei Daschur sind mit grosser Annäherung mit solchen Basiswinkeln versehen. Es ist nicht wahrscheinlich, dass die Aegypter es auf diese Weise gemacht haben, denn das hantieren mit einem Steinzylinder von für diesen Zweck einer Elle Durchmesser (52.35 cm) auf dem sandigen Plateau von Giseh erscheint doch angesichts der Grösse der Bauwerke als fragwürdig. Dennoch könnte die Anhänger des Zufallsprinzips ob solcher "Zufälle" der Mut verlassen.

Figur 5

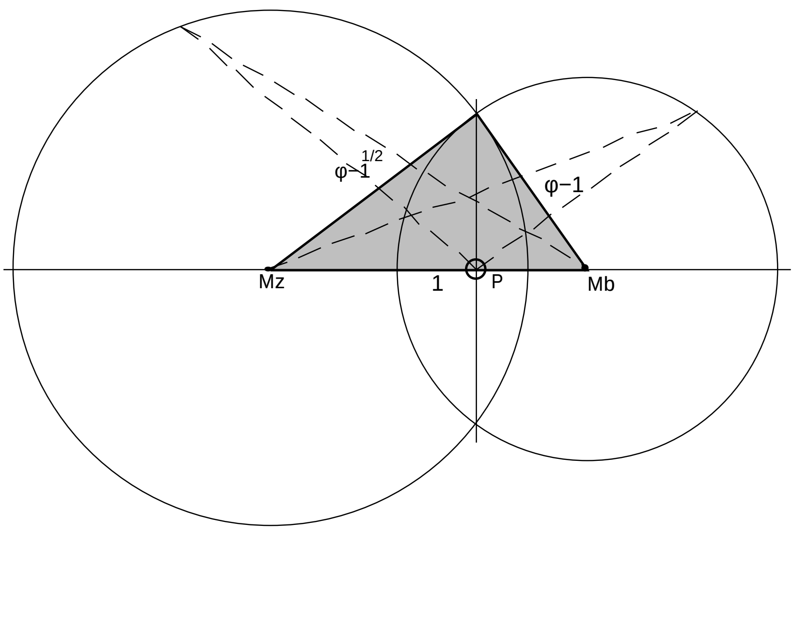
Fünf prägnante rechtwinklige Dreiecke im Vergleich



Für eine Konstruktion zweier sich durchdringender Divisionskreise kommt aber das Cheops-Profildreieck nicht in Frage, da es ganz geringfügig von der Rechtwinkligkeit abweicht und deshalb keine Divisionskreise bilden kann. Dazu aber bietet sich das Keplerdreieck geradezu an. J. Kepler, welcher sich selbst beschuldigte, die goldenen Gefässe Aegyptens geraubt zu haben, hat dieses "Gold-EdelsteinDreieck", wie er es nannte, im "mysterium cosmograficum" eingehend beschrieben und ihm seine ganze Bewunderung kundgetan. R. Steiner bezeichnete J. Kepler als diejenige Individualität unserer Kulturepoche, welche einstmals in den Geheimstätten Aegyptens den Seelenblick hinaufgelenkt hatte zu den Sternen und ihre Geheimnisse im Weltenraum in der damaligen Zeit zu ergründen suchte unter der Herrschaft der ägyptischen Weisen.

Es scheint deshalb nicht vermessen, einmal das Kepler-Dreieck als Grundlage einer Nachempfindung des Goetheanumgrundrisses anzuwenden (vgl. Fig. 6).

Figur 6



In diesem Riss befindet sich der Ort des Rednerpultes (P) im goldenen Schnitt der Strecke Mz Mb. Hier werden die Schallwellen vom Rednerpult zum Zuschauerkreis und zurück zur Mitte des Bühnenkreises in der Proportion 1 : 1.272...($\sqrt{1.6180339...}$)geleitet. Umgekehrt vom Rednerpult zum Bühnenkreis und von dort zur Mitte des Zuschauerkreises im klassischen goldenen Schnitt 1 : 1.6180339...(gestrichelte Linien in Figur 6). Fast alles, was sich geradlinig in diesem Raum abspielt, hat mit dem goldenen Schnitt zu tun.

Steht in C. Kempers Riss die ganzzahlige Harmonik der Töne im Vordergrung, so ist es beim "Kepler-Riss" die Irrationatlität der stetigen Teilung, jenem Phänomen, welches zusammen mit der Harmonik seine Wurzeln in uralter Zeit haben dürfte, in einer Zeit, wo der Logos der griechischen Geometrie auf der Empfindungsebene vorbereitet wurde.

So gesehen erscheint die Wahl des Schmid-Curtiusschen Risses als geometrische Grundlage für das Goetheanum für unseren Kulturkreis die einzig Richtige und sie zeigt auch, wie modern und feinfühlig R. Steiner seine Entscheidungen zu treffen vermochte. Sein Hinweis aber auf den Divisionskreis hat C. Kemper veranlasst, die geistigen Urgründe zu erforschen und zu einem Resultat zu kommen, welches als Musterbeispiel wissenschaftlicher Arbeit betrachtet werden kann. Wissenschaftlicher Arbeit nämlich im Sinne einer von der Quantität zur Qualität strebenden Forschung, wie sie heutzutage kaum mehr vorgenommen wird. Die Hereinnahme des Kepler-Dreiecks in diese Betrachtung soll hier nur die Vielfältigkeit der Möglichkeiten bei der Lösung eines Problems illustrieren. Zum Schluss seien die Beziehungen der Hauptmasse des Getheanmrisses für die drei gezeigten Möglichkeiten in einer Tabelle aufgeführt:

	MzMb	Durchm. Bühne Db	Durchm. Zuschaueraum Dz
Ausführung	21 m	12.40	17
Schmid-Curtius	21 m	12.3435	16.989
C. Kemper	21 m (5)	12.60 (3)	16.80 (4)
J. Kepler	21 m (τ)	12.9787 (1)	16.509 $(\sqrt{\tau})$

Die für so ein gewaltiges Gebäude, wie das Goetheanum nur geringfügig abweichenden Masse der beiden Kreisdurchmesser Dz und Db wären im Massstab 1 : 1 auch von einem geübten Auge kaum zu erkennen. Aus der vorstehenden Tabelle erkennt man aber auch, dass Schmid-Curtius die Idealmasse auf rationale Zentimetermasse aufgerundet hat. Somit entspricht der Goetheanumgrundriss eigentlich keiner der Theorien, genau gleich, wie dies bei der Pyramide des Cheops der Fall ist.