

Adolf Fischer

Wege zum unendlich Fernen

Wahrnehmung und Geometrie

»Die ›mathematische Wahrnehmung‹ liegt (...) nicht in der Außenwelt, sondern *im eigenen Organismus*. Deshalb kann der Wahrnehmungsinhalt auch dort verfügbar sein, wo (äußere Sinne) (...) keinen (...) bedeutungsvollen Inhalt« mehr (...) geben. »Der Eigenbewegungssinn, mit dessen Hilfe wir zugleich mathematische Inhalte erzeugen und wahrnehmen, braucht bei der Vermittlung von außen (...) Sinne, die auf die Außenwelt gerichtet sind.« Mathematik, insbesondere Geometrie, »entsteht menschenkundlich dort, wo die äußere Bewegung eine innere Fortsetzung findet.« (E. Schubert, S. 74/75)

Der äußeren Sinnestätigkeit antworten also innere Erlebnisse, die sich erkennend durchdringen lassen, die sich in klaren Vorstellungen und Begriffen ordnen lassen. Die Intensität dieser Erlebnisse und ihrer Verarbeitung schafft die Grundlage, auf der das Vertrauen in die eigene Erkenntnis anwächst bis hin zur sicheren Überzeugung (als Evidenzerlebnis) und dabei die anfänglich begleitenden (und wertvollen) Zweifel ausräumt.

Solche Ansätze erschließen die menschenbildende Dimension der Geometrie; sie lassen sich auch auf die übrigen Gebiete der Mathematik übertragen. Sie zu pflegen sollte das innerste Anliegen jedes Unterrichtenden sein.

Es darf nur nicht der folgenschwere Irrtum entstehen, daß die Gedankeninhalte der Geometrie in der Außenwelt selbst zu sehen oder zu erkennen seien. Wenn man klarmachen will, geometrische und mathematische Begriffe bis hin zu den Zahlen seien »Eigenschaften von konkreten Dingen, so verdirbt man den menschlichen Geist. Man suggeriert dem Kinde die Überzeugung, Geistiges sei auf äußerlich Wahrgenommenes zurückzuführen. Die unmittelbare Überzeugung, die das Kind der Zahl gegenüber haben kann, daß sie nämlich ein aus geistiger Tätigkeit gewonnenes Gebilde ist, wird durch eine falsche, dem Kinde aufgedrängte und dem natürlichen Erleben widerstrebende Meinung verfälscht« (E. M. Kranich, S. 60).

Sehr wohl kann man aber vertraute Wahrnehmungen der Außenwelt als Bilder benutzen, um mit ihnen mathematische (also geistige) Inhalte zu schildern. Dies soll im folgenden für den Begriff des Fernpunktes versucht werden. Zur Einführung in die Vorgehensweise und die benutzten Begriffe sei auf die beiden ersten Beiträge des Verfassers verwiesen (»Erziehungskunst« 6-94 und 9-94, S. 566 ff. und S. 839 ff.).

Wege zum Fernpunkt

a) Realer und idealer Horizont

Bereits in der ersten Himmelskunde (Kl. 6) werden Lehrer und Schüler an die Grenzen der äußeren sinnlichen Anschauung geführt. Der Begriff des Horizontes ist anfänglich an die sichtbare Linie zwischen Himmel und Erde gebunden; er ist noch abhängig von der konkreten Umgebung. »Der Gipfel am Horizont in bläulicher Ferne«, den man zunächst als realen Horizontpunkt anerkennt, stellt sich bald als näherungsweise Ersatz für einen »echten« Horizontpunkt heraus.

Doch in jedem Menschen lebt die Empfindung, daß es »hinter« den äußerlich sichtbaren Punkten noch »echte Fernpunkte« geben muß, die von den konkreten Sinnesdingen unabhängig sind. Dieses innere Erlebnis schafft Vertrauen in die eigene Denk- und Vorstellungstätigkeit, begründet Erkenntnisgewißheit und befreit die innere Anschauung von der Begrenzung der äußeren Wahrnehmung: Der gedachte Horizontpunkt wird »wirklicher« als der tatsächlich Gesehene! Gleichzeitig wächst die Frage: Wie kann ich verlässlich unterscheiden zwischen den beiden, wie kann ich »fehlerhafte Horizontpunkte« absondern von den »echten«?

b) Der Horizont ist in Ruhe

Auch hier kann auf Alltagserlebnisse zurückgegriffen werden. Wenn etwa bei einer abendlichen Fahrt mit der Eisenbahn (entlang einer Geraden, also ohne Kurven) der Blick aus dem Fenster über die vorbeifliegende Landschaft zum ruhig verharrenden Mond geht, ruft das mitfahrende Kind erstaunt aus: »Schau mal, der Mond fährt mit!« Der Mond ist in diesem Falle eine recht gute Annäherung an einen »echten Horizontpunkt«, die Blickrichtung zu ihm verändert sich (fast) nicht, obwohl man sich selbst (geradlinig) bewegt.

Weit entfernte Berge »wandern« nur langsam an uns vorbei. Doch je näher uns die betrachteten Punkte liegen, desto schneller werden sie. Sie werden der Anschauung unstabiler und immer weniger verlässlich. Die Blickrichtung zu ihnen verändert sich immerfort. Zuverlässige Richtungsangaben werden daher in unserem Sprachgebrauch deutlich von der irdischen Umgebung unterschieden; man spricht von den »Himmelsrichtungen«.

Die Blickrichtung zu einem Horizontpunkt ist also unabhängig von der eigenen (geradlinigen) Bewegung und vom momentanen Standort. Die Blickrichtungen zu ihm sind parallel. Der Horizontpunkt zeichnet sich also dadurch aus, daß er parallaxefrei ist. Über seine Entfernung braucht dabei gar nicht gesprochen zu werden. Kann überhaupt etwas dazu gesagt werden?

c) *Wie weit sind Horizontpunkte entfernt?*

Offenbar nähern sich äußerlich sichtbare Punkte immer besser an »echte Horizontpunkte« an, je größer ihre Entfernung vom Betrachter ist. Jede Entfernung von einem Punkt zu einem anderen wird mit einer Anzahl von gleichbleibend großen Schritten angegeben. Doch genau dieses Verfahren, das für alle »wirklichen« Punkte gültig ist, versagt bei Horizontpunkten. Sie sind *nicht* mit endlich vielen Schritten *erreichbar*, sie sind »unzugänglich«, sie sind »fern«. Man kann sie daher auch nicht mit »normalen« oder »eigentlichen« Punkten gleichsetzen. Häufig werden sie deshalb als »uneigentliche Punkte« eingeführt. Dies alles scheint der Sicherheit zu widerstreiten, mit der ihre Existenz erlebt werden kann.

Aus irdischer Sicht erfüllen nur die Fixsterne diese strenge Anforderung (Schon der Mond zeigt zwei Betrachtern, die 1000 Kilometer voneinander entfernt sind, eine Abweichung in der Blickrichtung von ca. $0,15^\circ$)

d) *Dualität der Horizontpunkte*

Eine weitere Eigentümlichkeit der Horizontpunkte läßt sich anhand eines anderen Bildes schildern. Wenn man in einem Boot paddelt, so schaut man dabei in Fahrtrichtung, das Ziel vor Augen. Beim Rudern dagegen sitzt man rückwärts im Boot, und der Anfänger wird zunächst nur schwer die Richtung einhalten können. Doch bald erkennt er die Bedeutung des entgegengesetzten Horizontpunktes. Ein genügend weit entfernter Punkt kann als sichtbarer Ersatz dafür dienen. Ist der richtige Punkt erst einmal gefunden, so muß nur das Heck des Bootes immer auf ihn zeigen, und das Boot bleibt in der Richtung.

Die Richtungsangabe durch Horizontpunkte ist also für eine Gerade auf zweifache Weise möglich: Die Richtung, aus der wir kommen, und diejenige, in die wir uns bewegen, ist die gleiche. Auch der Blick auf den Kompaß lehrt dasselbe: Die Nadel zeigt immer dann nach Norden, wenn sie auch gleichzeitig nach Süden zeigt! Die Richtung der Geraden, die von der Kompaßnadel angezeigt wird, muß also noch mit einem »Richtungs-Sinn« gekennzeichnet sein: Von Süd nach Nord oder umgekehrt.

Der Begriff des Fernpunktes in der Geometrie

a) *Ein Abbild des Fernpunktes*

Ein sehr aufschlußreiches Bild des Fernpunktes einer Geraden entsteht durch eine geeignete Abbildung der Geraden g auf einen Kreis K :

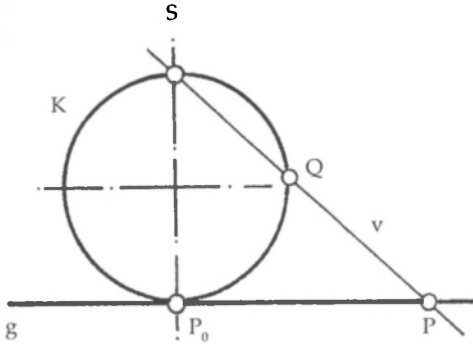


Abb. 1

Zu jedem Geradenpunkt P (Urbild) wird der entsprechende Kreispunkt Q (Abbild) wie folgt gefunden: Wir verbinden den Geradenpunkt P mit dem oberen Kreisscheitel S . Diese Verbindung v schneidet den Kreis im zugehörigen Bildpunkt Q (Abb. 1). Zu jedem Geradenpunkt existiert nun genau ein Kreispunkt und umgekehrt (ausgenommen der obere Scheitel S selbst).

Lassen wir nun den Punkt P mit gleichmäßiger Geschwindigkeit vom Fußpunkt P_0 aus die Punktreihe $P_1, P_2, \text{ usw.}$ auf der Geraden g entlangwandern, so durchläuft der entsprechende Bildpunkt Q auf dem Kreis die Folge $Q_0, Q_2, \text{ usw.}$; der Bildpunkt Q wird dabei immer langsamer: die Schritte werden immer enger, je näher wir an den oberen Scheitelpunkt herankommen. Dieser

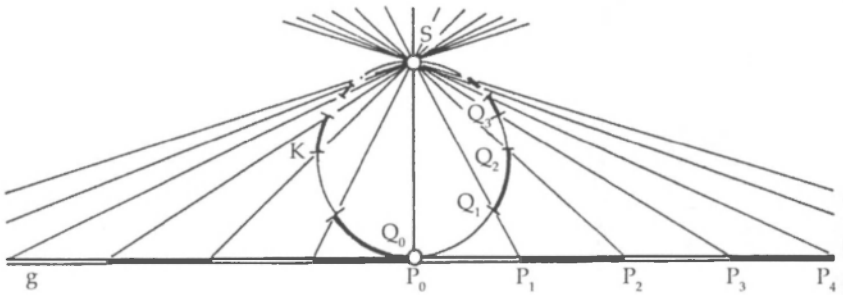


Abb. 2

wird selbst nicht als Bildpunkt eines Geradenpunktes erreicht. In seiner Nähe aber häufen sich die Bildpunkte immer stärker (Abb. 2).

Dieselbe Erscheinung ergibt sich, wenn wir die Gerade in der entgegengesetzten Richtung durchlaufen. Hier nähern wir uns mit den Abbildern von der anderen Seite dem Scheitelpunkt S des Kreises.

b) Gleichzeitig Stau- und Fluchtpunkt

Die für die Konstruktion benutzten Verbindungen v nähern sich aus zwei Drehrichtungen an die Richtung unserer Geraden g an. Es ist deutlich erlebbar, wie der Scheitelpunkt S als Bildpunkt selbst und die Parallele s als Verbindung zwar nie erreicht, aber beliebig gut angenähert werden können. In jeder noch so kleinen Umgebung des Scheitelpunktes S liegen beliebig (unendlich) viele Bildpunkte, deren Urbilder beliebig weit auf der ursprünglichen Geraden hinauslaufen.

Was also bei der Geraden als Flucht in die Unendlichkeit erscheint, stellt

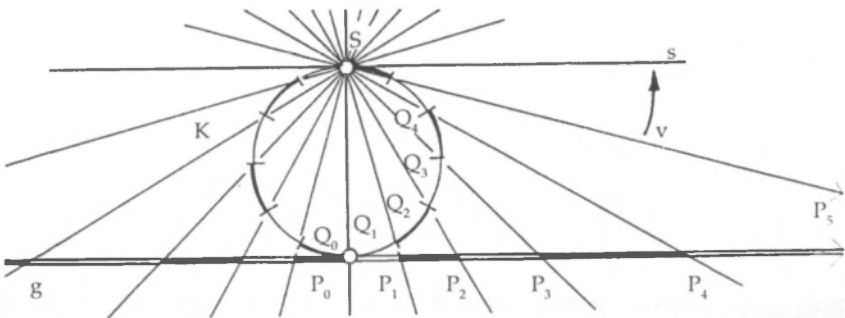


Abb. 3

sich beim Abbild auf dem Kreis als Staupunkt heraus, vor dem die entsprechende Wanderung stagniert. Die beiden unbegrenzt auseinanderstrebenden Enden der Geraden erscheinen im Bild als immer enger zusammenrückend auf einen einzigen Zielpunkt.

Umgekehrt kann man nun die Vorstellung einer gleichmäßigen Wanderung der Bildpunkte Q wecken und dabei versuchen, die Bewegung der zugehörigen Urbilder P auf der Geraden g nachzuempfinden (Abb. 3). Die Geschwindigkeit des Punktes P beschleunigt dabei immer mehr, je näher wir mit Q an den Scheitel S kommen; für einen Moment entschwindet P unserer Vorstellung, um dann mit großer Geschwindigkeit von der anderen Seite der Geraden zurückzukehren und sich zu verlangsamen. Resigniert nehmen wir zur Kenntnis, daß unsere Vorstellung gerade den entscheidenden Moment verpaßt hat. Aber im Denken steigt die Ahnung auf, daß dieser Abgrund überbrückt werden kann.

c) Eine Tat des Ich: der Fernpunkt

Verfolgt man diese Bilder innerlich mit, so spürt man immer deutlicher, daß die Dualität der beiden Horizont- oder Fluchtpunkte der Geraden sich durch

einen übergeordneten Begriff aufheben lassen muß; dieser ist unabhängig von äußerer Wahrnehmung aus der geistigen Anschauung zu schöpfen: Die beiden Zielrichtungen lassen sich in einem Fernpunkt F zusammenfassen, dessen Bild auf dem Scheitelpunkt S des Kreises erscheint.

Der (eine) Fernpunkt schließt damit die Gerade g zu einem in sich geschlossenen Gebilde zusammen. Man kann ihn also auch über- oder besser: durchschreiten in Form eines Durchgangs durch unendliche Fernen, die nur Gedanken durchfliegen können. Der Vorstellung bleibt die Erdenspur im Abbilde des Kreises, bei dem der Scheitel S überschritten wird zur anderen Kreishälfte. Das entscheidende Erlebnis ist, daß durch einen bewußten Willensakt die Vorstellungsebene überbrückt werden kann, daß hier eine Setzung aus dem eigenen Denken die begrenzte Vorstellung ergänzt und dadurch Sinn und Zusammenhang stiftet.

Auf ähnlichen Wegen lassen sich auch die Ferngerade oder gar die Fernebene (bei der Geometrie des Raumes) erschließen. Bei der Ferngeraden kann sogar eine Entsprechung zum oben entwickelten Bild gefunden werden. Es ist die Abbildung, die innerhalb der Kartographie den winkeltreuen azimutalen Entwurf ergibt. Das Bild der Ferngeraden in der Kartenebene erscheint dann als gegenüberliegender Pol auf der (Erd-)Kugel. Im übrigen bietet die Inversion am Kreis ein reiches Feld, um konkrete Bilder der Fernelemente zu studieren. Dazu werden im vierten Teil dieser Artikelfolge zur Geometrie einige Beispiele ausgeführt werden.

Es ist klar, daß der Umgang mit den Fernelementen noch längere Zeit gewöhnungsbedürftig bleibt. Erleichtern mag der Hinweis, daß der Weg zum Fernpunkt Schritt für Schritt mit logischer Stringenz herleitbar ist. Allerdings bedarf es dazu der korrekt gefaßten Begriffe »Grenzwert« und »Häufungspunkt« aus Analysis oder Topologie.

Damit wird auch deutlich, daß der Fernpunkt selbst nicht mehr Unterrichtsgegenstand für die Klassenlehrerzeit (Kl. 1 - 8) ist. Setzungen aus dem Denken sind erst dann besprechbar, wenn die freien Seelenkräfte des Jugendlichen vom ersten Schimmer des sich entfaltenden Ich durchlichtet werden. Zwar wird der Fernpunkt bildhaft hereinleuchten beim perspektivischen Zeichnen (Kl. 7/8). Eine »räumlich wirkende« Zeichnung entsteht dadurch, daß im Raume (der Wirklichkeit) parallel verlaufende Geraden (Geradenschar) auf dem Papier (dem Abbild in der Zeichenebene) nicht mehr parallel gezeichnet werden, sondern auf einen gemeinsamen Fluchtpunkt hinlaufen (zum Geradenbüschel werden). Doch ist dieser Punkt für das Bild und die Vorstellung auch der Endpunkt aller Geraden; die wesentliche Eigenschaft des Fernpunktes fehlt ihm also noch! Trotzdem ist bezeichnend, daß diese Fähigkeit erst mit der Frührenaissance errungen wurde (Entwicklung der Bewußtseinsseele).

Wesentlich einfacher ist die Einführung der Fernpunkte über eine formale

Definition, mit der die eigentlichen Punkte der Ebene durch die uneigentlichen ergänzt werden, um damit die »lästigen Ausnahmen« der fehlenden Schnittpunkte bei Geraden gleicher Richtung zu »umgehen«. Man benutzt die Regeln der Logik und braucht sich um die Denkinhalte kaum zu kümmern. Doch solches Denken bleibt abstrakt und leer, es kann auch nicht zu neuen Erkenntnissen vorstoßen.

Mühsamer ist freilich der Weg über die Vorstellung mit willentlich geführter Bewegung der Bildinhalte, weil man dort an Grenzen stößt. Doch deren Überwindung aus der Schöpferkraft des Ich läßt erst den geistigen Freiraum und die Einsicht in höhere Wahrheiten erringen.

Fernpunkt, Richtung und Durchlaufsinne

Wir haben gesehen, daß Geraden mit gleicher Richtung alle einen Fernpunkt gemeinsam haben. Eine Parallelschar ist also ein vom zugehörigen Fernpunkt getragenes Geradenbüschel.

Da man sich auf zweifache Weise auf den Weg zum Fernpunkt machen kann, sagt der Fernpunkt und mit ihm die Richtung der Geraden nichts über den Durchlaufsinne aus. Im Gegenteil: Ohne Fernpunkt wird das Durchlaufen einer Strecke von A nach B durch die Reihenfolge eindeutig gerichtet, und die Folge B – A ist ihr entgegengesetzt. Mit dem Fernpunkt kann man von A nach B gelangen, um dann sogar im selben Umlaufsinne über den Fernpunkt erneut A wieder zu erreichen. Will man den Durchlaufsinne deutlich machen, so ist ein weiterer Punkt erforderlich, der die Reihenfolge verbindlich macht, oder man kennzeichnet den Laufsinne (zum Beispiel mit einem Pfeil).

Bei Aufgaben aus der Elementargeometrie kann die Unterscheidung des Durchlaufsinnes sehr wesentlich werden. Wir wollen abschließend ein einfaches Beispiel betrachten, bei dem die bisher entwickelten Begriffe noch einmal angewandt werden.

a) Die Winkelsumme im Dreieck

Eine der ersten Aufgaben innerhalb der Dreiecksgeometrie ist die Herleitung der Winkelsumme im Dreieck. Vielleicht erinnert sich mancher Leser daran, wie er als Schüler mit einem formalen Beweis zu den bekannten 180° geführt wurde, möglicherweise gar über eine algebraische Winkelsumme. Andere hatten vielleicht das Glück, daß ihnen anschaulich gezeigt wurde, wie man die Winkel verschieben und zusammensetzen kann. Oft blieb der Beweis aber ohne innere Überzeugung von der Wahrheit und ohne Verbindung mit dem Dreieck. Es kann jedoch der Zusammenhang der Erscheinungen »Dreieck« und »gestreckter Winkel als Winkelsumme« auf ganz natürliche Weise sichtbar werden.

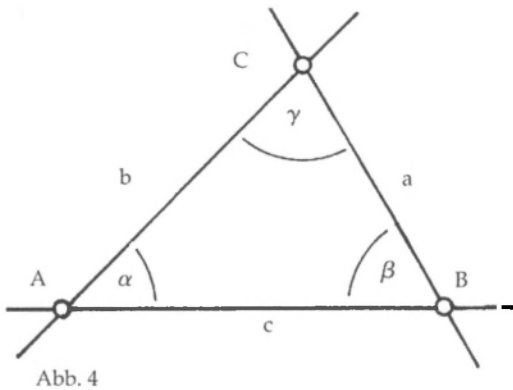


Abb. 4

Wir geben uns die drei Ecken A, B, C mit den drei Seiten a, b, c gemäß Zeichnung vor. Zunächst betrachten wir, daß je zwei Geraden durch jeweils einen Punkt gehen (z. B. die Seiten c und b durch Ecke A) und dabei ein Winkel-
feld aus dem von dem betreffenden Punkt (A) getragenen Geradenbündel aus-
schneiden. Je zwei Punkte

liegen auf einer Geraden (z. B. die Ecken A und C auf Seite b), aus der von der betreffenden Geraden (b) getragenen Punktreihe schneiden sie dabei eine Strecke aus (Abb. 4).

Eine Seite können wir in die andere überführen (von c nach b), indem wir das ihnen gemeinsame Geradenbündel (auf A) durchlaufen (Abb.5). Eine Ecke überführen wir in die andere (von A nach C), indem wir die ihnen gemeinsame Punktreihe (auf b) durchlaufen (Abb. 6)

Bei diesem Beispiel müssen wir sowohl bei Bündel wie auch bei der Punktreihe auf den Durchlaufsinne achten. Wir legen zu Beginn die Gerade g so, daß sie auf der Seite c liegt und durch die Ecken A und B geht. Wir kennzeichnen den Durchlaufsinne der Punktreihe darauf mit einem Pfeil von A über B zum Fernpunkt F_c (Abb. 5).

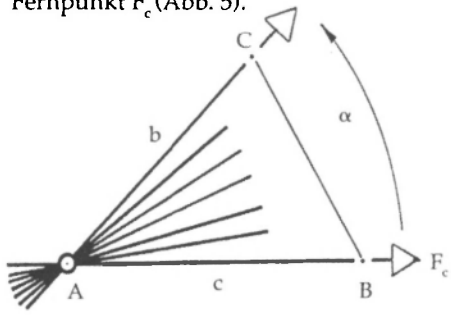


Abb. 5

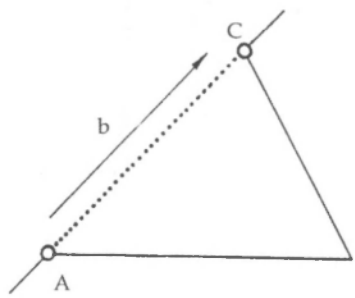


Abb. 6

b) Winkelsumme als mehrfache Drehung

Nun fassen wir die Gerade g als Teil des von A getragenen Bündels auf und drehen sie so, daß sie das Dreiecksinnere überstreicht (Pfeilrichtung entgegen

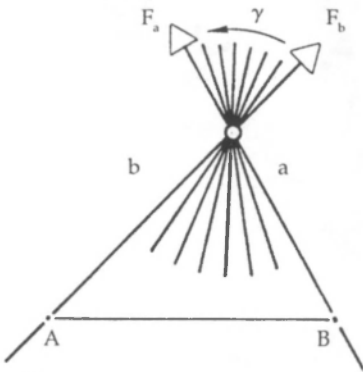


Abb. 7

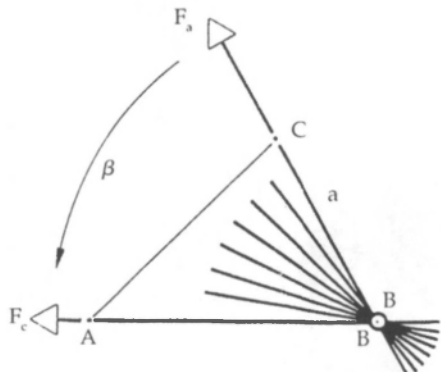


Abb. 8

dem Uhrzeigersinn), bis sie die Lage von b einnimmt (Abb. 5). Sie hat sich damit genau um den Winkel α gedreht. Außerdem sind wir sicher, daß sie nun durch die Ecke C geht (C liegt ja auf b).

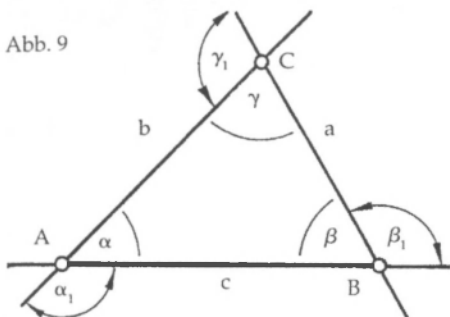
Auf der Punktreihe b wandern wir von A zum neuen Drehpunkt C (Abb. 6) und fassen unsere Gerade g als Teil des von C getragenen Büschels auf. Mit dem gleichen Drehsinn wie vorher überstreichen wir das Winkelfeld, bis g auf a zu liegen kommt und notwendigerweise durch die Ecke B geht (Abb. 7). Die Gerade wurde nun bereits um die Summe von α und γ gedreht. Danach führen wir denselben Vorgang auch an der Ecke B aus, bis die Gerade g auf die ursprüngliche Seite c zu liegen kommt (Abb. 8).

Man erkennt sofort, daß das Dreieck sich nur dann an der Ecke A schließen läßt, wenn die Drehung unserer Geraden g nach einer Umwendung des Durchlaufsinnes (der mitgeführte Pfeil zeigt nun entgegengesetzt: $BAFc$) genau wieder die alte Richtung einnimmt. Diese exakt »halbe« Drehung wird im Winkelmaß mit 180° beschrieben und stellt die Summe der drei Teildrehungen um die Winkel α , β und γ dar. Die Eigenschaften »das Dreieck schließt sich« und »die Winkelsumme erreicht 180° « bedingen sich also gegenseitig. Sie werden damit als wesensgleich erlebt und sind beide im Dreiecksbegriff latent enthalten.

c) Zusammenhang als Grund der Beweisfähigkeit

Man kann mit solchem Vorgehen die Empfindung wecken, daß der Satz: »Die Winkelsumme im Dreieck beträgt 180° « beweisbar sein muß. Methoden und Wege sind dann frei. Wenn sie logisch richtig sind, müssen sie immer zum selben Ergebnis gelangen. Für einen Mittelstufenschüler wird aber die Wahrheit des Satzes dann als evident erlebt, wenn es mit innerer Eigenbewegung vollziehbar und anschaulich gemacht wurde.

Abb. 9



d) Erweiterungsfähigkeit

Die Bewegungen, mit denen wir das Dreieck so umlaufen haben, daß dabei die Winkelsumme der Innenwinkel sichtbar wurde, läßt sich auch auf die Außenwinkel $\alpha_1, \beta_1, \gamma_1$ des Dreiecks anwenden (Abb. 9).

Wir müssen dazu nur die Drehrichtung entgegengesetzt wählen (bei unserem Beispiel

also mit dem Uhrzeigersinn), so daß die Gerade beim Durchwandern des Büschels das Dreiecksinnere meidet. Der Leser möge es versuchen und (hoffentlich ohne Mühe!) diesmal mit einer vollen Umdrehung zur Ausgangsseite zurückfinden: Die Summe der Außenwinkel im Dreieck beträgt 360° .

Weiterhin läßt sich ebenfalls mit einer solchen Drehung zeigen, daß die Summe zweier Innenwinkel so groß ist wie der Außenwinkel an der 3. Ecke: Wie beim ersten Beispiel beginnen wir mit der Seite c und drehen sie entgegen dem Uhrzeigersinn (über das Dreiecksinnere hinweg) um A auf b (Abb. 5); anschließend um C auf die Seite a (Abb. 7). Wie vorher haben wir nun die Summe von α und γ überstrichen. Wenn wir nun um die Ecke B rückläufig drehen, kommen wir nach Durchlaufen des Außenwinkels β_1 auf die Grundseite c zurück und sehen, daß damit die vorausgegangene Drehung exakt aufgehoben worden ist: Der Außenwinkel β_1 entspricht der Summe der beiden Innenwinkel $\alpha + \gamma$.

Das Verfahren eignet sich natürlich auch für Vierecke und andere Figuren.

Geometrie der Klassenlehrerzeit

Zweifellos haben Klassenlehrer in der Mathematik eine schwere Aufgabe: Sie sollen bei den Schülern einerseits die nötigen Fertigkeiten anlegen, sie üben und verfügbar machen (was als notwendiges Übel empfunden werden kann); die Lehrer sollen aber auch heranwachsenden jungen Menschen »die Mathematik so beibringen (...), daß die elementaren Anfänge schon den Keim späterer Erweiterungen und Vertiefungen enthalten – und daß die später kommenden Themen und Darstellungen in geeigneter Weise früher veranlagt worden sind. (...) Zur rechten Zeit (sind) nicht zu viel und nicht zu wenig Präzisierungen und Verallgemeinerungen einzuführen. (...) Hier liegt eine große Verantwortung, da in der Unterstufe (bis hin zur oberen Mittelstufe) Versäumtes in der Oberstufe kaum mehr nachzuholen ist« (R. Ziegler).

»Die Klassen der Mittelstufe dürfen nicht nur von unten, sie müssen auch von oben her getragen sein« – mit Betrachtungen, in denen »die Arbeitsweisen der Oberstufe anklingen« und mit Begriffen, die »nicht gleich in letzter Schärfe gefaßt, sondern nur vorbereitend zum Erleben gebracht« werden. Der Klassenlehrer soll sich selbst so schulen, daß er fähig wird, »den Stoff vor der Klasse so darzustellen, daß er zündet. Es festigt seine Autorität in gesunder Weise, wenn die Schüler merken, er weiß nicht nur gerade das, was er sagt – sondern er sagt es aus einem tieferen Hintergrund« (A. Bernhard, S. 8).

In der Mittelstufe kann noch nicht der Begriff des Fernpunktes gefaßt werden, doch man kann die vorbereitenden Bilder von Horizont und Ausrichtung auf Horizontpunkte schildern. Dazu sollte sich der Lehrer zu den Fernelementen hinarbeiten und sich so Überblicke im geometrischen Denken und Vorstellen erringen.

In diesem Sinne wandten sich die Beiträge (neben allen geometrisch interessierten Lesern) an die Lehrer der Klassen 6 bis 9. So sollten vor allem dem Klassenlehrer Anregungen für seinen eigenen Übungsweg gegeben und ihm Zusammenhänge und Ausblicke gezeigt werden. Die ausgeführten Beispiele können eine Handreichung darstellen, um in dieser Altersstufe bewegliches Vorstellungsvermögen zu entwickeln, damit in einer 11. und 12. Klasse der Boden bereitet ist für das Gedeihen der projektiven Geometrie.

Im Formenzeichnen der Unterstufe bis hin zur ersten Geometrie der 5. Klasse können aus solchem Ansatz heraus die Begriffe: »Schar von (waagrechten, senkrechten, schrägen) Geraden«, »Geradenbüschel« (Rotationssymmetrie) und »Punktreihe« (Translationssymmetrie) in Bilder gebracht werden und so die Unterrichtsvorbereitung des Lehrers befruchten.

Darüber hinaus wollte der Artikel die Aufmerksamkeit auf einen zeitgemäßen Schulungsweg lenken: Die Methoden und Inhalte der projektiven Geometrie sind *das* Übungsfeld, um exakte Phantasie zu formen und die Vorstellungsfähigkeit weit über das gewöhnliche Anschauen hinaus zu entwickeln im Sinne des Buchtitels von Louis Locher-Ernst: »Mathematik als Vorschule zur Geist-Erkenntnis«. Als hilfreicher und geduldiger Begleiter ist die »Projektive Geometrie« von A. Bernhard herzlich zu empfehlen.

Literatur:

A. Bernhard: Geometrie für die 7. und 8. Klasse an Waldorfschulen, Stuttgart 1993 (mit Hinweisen auf weitere Literatur zur Geometrie in der Waldorfschule).

A. Bernhard: Projektive Geometrie aus der Raumanschauung zeichnend entwickelt, Stuttgart 1984 (ebenfalls mit umfangreichen Literaturhinweisen).

E. M. Kranich: Pädagogische Projekte und ihre Folgen, Stuttgart 1971.

E. Schubert: Der Anfangsunterricht in der Mathematik der Waldorfschulen, Stuttgart 1993.

R. Ziegler: Besprechung des Buches »Geometrie« von A. Bernhard; »Die Drei« 7/8-94, S. 636.